

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 13 - Abgabe bis Dienstag, 16.07.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Ein Lebensmittelhersteller bezieht von einem Zulieferbetrieb drei Grundsubstanzen M_1 , M_2 und M_3 , die wiederum aus drei Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 gemischt werden, und zwar in folgenden Prozentsätzen:

	R_1	R_2	R_3
M_1	30	50	20
M_2	20	20	60
M_3	40	50	10

Für die Herstellung eines neuen Produkts benötigt man aber eine Grundsubstanz, die 30% des Rohstoffs R_1 , 40% des Rohstoffs R_2 und 30% des Rohstoffs R_3 enthält? Kann eine solche Grundsubstanz durch Mischung der vorhandenen Grundsubstanzen M_1 , M_2 und M_3 erhalten werden? Falls ja, dann geben Sie an, wie die Mischung herzustellen ist.

Aufgabe 13.2 (12 Punkte)

Betrachtet werde das parameterbehaftete lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & t & 5 \\ 0 & 2 & 1 & r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ s \end{pmatrix}$$

- Welche Bedingungen müssen die Parameter $r, s, t \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit das Gleichungssystem
 - eindeutig lösbar,
 - unlösbar bzw.
 - mehrdeutig lösbar ist?
- Geben Sie für den Fall (iii) alle möglichen Lösungen an und schreiben Sie diese in der Form $x = x_p + x_h$, wobei x_p eine partikuläre Lösung des gegebenen inhomogenen und x_h die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist.
- Unter welcher Bedingung läßt sich der vierte Spaltenvektor der Matrix A als lineare Kombination der anderen Spaltenvektoren von A darstellen, und wie lautet diese Darstellung?

Aufgabe 13.3 (5 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen regulär sind. Falls ja, dann berechnen Sie die Inverse.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -9 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

(Aufgaben 13.4 und 13.5 siehe Seite 2)

Aufgabe 13.4 (7 Punkte)

Mit $\mathcal{L}(A, b)$ sei die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ bezeichnet ($A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$).
Beweisen Sie folgenden Behauptungen:

- (a) Aus $x, y \in \mathcal{L}(A, b)$ folgt $x + 2y \in \mathcal{L}(A, 3b)$.
- (b) Aus $x \in \mathcal{L}(A, b)$ und $y \in \mathcal{L}(A, b - c)$ folgt $x - y \in \mathcal{L}(A, c)$.
- (c) Ist $b \neq 0$ und $x \in \mathcal{L}(C, b) \cap \mathcal{L}(D, b)$, dann gilt $\text{rg}(C - D) < n$.

Aufgabe 13.5 (9 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten und den Rang der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ist es möglich, die Determinante der Matrix B auch ohne eine der bekannten Rechenmethoden zu bestimmen?
Begründen Sie ihre Antwort!