

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen, Matr.-Nr., Übungsgruppe auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 14 - Abgabe bis Dienstag, 30.07.2013, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Die Korrektur Ihrer Lösungen erfolgt nur, wenn Sie noch nicht 50 % der Übungspunkte erreicht haben, die sich aus den Ergebnissen der Übungsblätter 1 bis 13 ergeben.

Aufgabe 14.1 (6 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Matrix $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, für die $A \cdot X = B$ gilt, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Matrix $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, für die $A \cdot X \cdot B = C$ gilt, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14.2 (6 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$(a) \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (b) \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Matrizen B und C , so dass das Produkt $B \cdot A \cdot C$ jeweils die Form

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat, wobei I_r die $(r \times r)$ -Einheitsmatrix ist und $r = \text{rg}(A)$.

Aufgabe 14.3 (5 Punkte)
Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Berechnen Sie

- (a) $\det(A)$
- (b) $\det(A^{10})$
- (c) $\det(A^T \cdot A^{-1})$

Welche der Aufgabenteile (a), (b) und (c) ist nicht sinnvoll für $A \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{4 \times 4}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

(Aufgaben 14.4 bis 14.19 - siehe Seite 2ff.)

Aufgabe 14.4 (6 Punkte)

Berechnen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Determinante von

$$A_n := \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

(Hinweise/Anleitung: Berechnen Sie zunächst die Determinanten von A_1 und A_2 , um eine Vermutung für die Determinante von A_n zu erhalten. Überführen Sie A_n mit elementaren Zeilenoperation in eine obere Dreiecksmatrix und wenden Sie das Beweisprinzip der vollständigen Induktion an!)

Aufgabe 14.5 (10 Punkte)

Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$(a) \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (b) \quad B := \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

und geben Sie die Dimension der zugehörigen Eigenräume an.

Aufgabe 14.6 (5 Punkte)

- (a) Sei V ein Vektorraum. Geben Sie ein Beispiel für eine lineare Abbildung $: V \rightarrow V$, die keine reellen Eigenwerte besitzt (mit Begründung).
- (b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Leiten Sie daraus einen Eigenwert der Matrix $B := A^2 - A^{-1}$ ab.

Aufgabe 14.7 (13 Punkte)

- (a) Wir betrachten eine zweistellige Zahl. Vertauscht man die beiden Ziffern, so ergibt dies eine um 27 kleinere Zahl. Die Summe der beiden Ziffern ergibt 13. Wie lautet die gesuchte Zahl?
- (b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^n (3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (c) Sei $z := 2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 4$. Zeigen Sie, dass z für gerades n keine Primzahl ist.
- (d) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 1926 und 1314 mittels
 - (i) des Euklidischen Algorithmus bzw.
 - (ii) mittels Primfaktorenzerlegung.
- (e) Stellen Sie die Additions- und die Multiplikationstafel von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ auf. Sind die Gleichungen $x^2 - 1 = 0$ und $x^2 = 2$ lösbar? Wenn ja, dann geben Sie jeweils alle Lösungen an.

Aufgabe 14.8 (14 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 1536 und 1176, sowie Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(1536, 1176) = s \cdot 1536 + t \cdot 1176$. Leiten Sie aus Ihren Rechnungen außerdem die inverse Restklasse von 49 in $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$ ab.

(b) Berechnen Sie die eindeutige Lösung des folgenden Systems linearer Kongruenzen:

$$x \equiv 9 \pmod{11}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

(c) Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus für Polynome den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ mit

$$f(x) := 2x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 4x^2 + 11x - 2 \quad \text{und} \quad g(x) := x^4 - 7x^2 - 4x + 2$$

Aufgabe 14.9 (5 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Produkte $AB, BA, B^T A^T, CC^T, BC, AC, ABC, BAC^T$, falls diese definiert sind.

Aufgabe 14.10 (11 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix},$$
$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie eine Basis von $U = \text{span}(a, b, c, d, e, f, g, h)$, und zeigen Sie, dass x und y linear unabhängig und damit eine Basis von $V = \text{span}(x, y)$ sind.
- (b) Weisen Sie nach, dass $\mathbb{R}^4 = U + V$ gilt.
- (c) Ergänzen Sie eine Basis von V zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 14.11 (5 Punkte)

Gegeben sei der Untervektorraum

$$U = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{R}^5.$$

- (a) Berechnen Sie eine Basis und die Dimension von U .
- (b) Bestimmen Sie ein homogenes lineares Gleichungssystem, dass den Unterraum U als Lösungsmenge hat. (Hinweis: Die Koeffizientenmatrix B des gesuchten Gleichungssystems $Bx = 0$ hat $\text{rg}(B) = 5 - \dim(U)$ Zeilen, und ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems $Ax = 0$, wobei die Zeilen von A eine Basis von U bilden.)

(Aufgaben 14.12 bis 14.19 - siehe Seite 4ff.)

Aufgabe 14.12 (8 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f((x, y)^T) := \left(\frac{x}{3} + \frac{2y}{3}, \frac{x}{3} + \frac{2y}{3}\right)^T$.

- Lesen Sie aus der Definition von f die zugehörige Abbildungsmatrix bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ ab.
- Zeigen Sie, dass $f \circ f = f$ gilt.
- Bestimmen Sie Kern und Bild von f . Zeigen Sie: $\mathbb{R}^2 = \ker(f) + \operatorname{im}(f) = \{u + v \mid u \in \ker(f), v \in \operatorname{im}(f)\}$ und es gilt $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0\}$. (*Hinweis: In diesem Fall nennt man die Summe $\ker(f) + \operatorname{im}(f)$ auch direkte Summe.*)
- Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Aufgabe 14.13 (7 Punkte)

Mit

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid w + x + y + z = 0 \right\}$$

wird ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ definiert. Sei $f : V \rightarrow V$ definiert durch

$$f \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Weisen Sie nach, dass $B = \{(1, -1, 0, 0)^T, (0, 1, -1, 0)^T, (0, 0, 1, -1)^T\}$ eine Basis von V ist.
(*Hinweis: Weisen Sie dabei insbesondere auch nach, dass jede Linearkombination der drei Basisvektoren auch tatsächlich in V liegt!*)
- Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bzgl. der Basis B aus (a). Geben Sie die notwendigen Rechenschritte an, um $f(u)$ für $u = (1, 2, 2, -5) \in V$ mit Hilfe von A auszurechnen.

Aufgabe 14.14 (21 Punkte)

Gegeben seien der Vektorraum $U = \operatorname{span}\{(1, 0, 2)^T, (2, 1, 0)^T, (0, 2, 2)^T\} \subseteq \mathbb{R}^3$, der Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ mit der Basis und eine lineare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ mit

$$f(a, b, c) := a + bx^2 + cx^3.$$

- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von f , wobei $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ die Basis
 - $B_1 = \{1, 1 - x, 1 + x^2, 1 - x^3\}$ bzw.
 - $B_2 = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$
 hat. Geben Sie jeweils die notwendigen Rechenschritte an, um $f(z)$ für $z = (3, 3, 4)^T \in U$ mit Hilfe von A zu berechnen.
- Ist f injektiv?
- Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{im}(f)$, indem Sie aus den Spaltenvektoren von A die zugehörigen Koordinatenvektoren der Basiselemente bzgl. der Basis B_1 auswählen. Geben Sie die so erhaltene Basis von $\operatorname{im}(f) \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ an.
- Bestimmen Sie eine alternative Basis von $\operatorname{im}(f)$, indem Sie aus den Spaltenvektoren von A die zugehörigen Koordinatenvektoren der Basiselemente bzgl. der Basis B_1 berechnen. Geben Sie die so erhaltene Basis von $\operatorname{im}(f) \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ an. Geben Sie außerdem die Koordinaten von $f(z)$ aus Aufgabenteil (a) bzgl. dieser Basis von $\operatorname{im}(f)$ an.

(Aufgaben 14.15 bis 14.19 - siehe Seite 5f.)

Aufgabe 14.15 (6 Punkte)

Für einen Vektorraum V über einem Körper K seien zwei Basen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ gegeben, und es gilt

$$b_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} c_i, \quad t_{ij} \in K, \quad j = 1, \dots, n.$$

Die Matrix $T_B^C = (t_{ij})$ heißt Transformationsmatrix für die Basistransformation von B nach C .

- (a) Gegeben sei die Basis

$$B = \{(1, -1, 0)^T, (1, 0, -1)^T, (1, 1, 1)^T\}$$

des Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix des Basiswechsels von dieser Basis auf die Standardbasis

$$C = \{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$$

und die Transformationsmatrix des Basiswechsels von C auf B .

- (b) Zeigen Sie, dass beide Transformationsmatrizen zueinander invers sind.

(Hinweis: Die Basistransformation ist eine lineare Abbildung mit einer speziellen Abbildungsvorschrift.)

Aufgabe 14.16 (10 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = \operatorname{im}(f)$ gibt.
- (b) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K . Zeigen Sie, dass es genau dann eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ mit $\ker(f) = \operatorname{im}(f)$ gibt, wenn die Dimension von V gerade ist.
- (c) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K . Gibt es eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ mit $\ker(f) = \operatorname{im}(f)$, wenn die Dimension von V ungerade ist?

Aufgabe 14.17 (10 Punkte)

Sei $\mathbb{R}[x]$ der Polynomring über $\mathbb{R}$.

- (a) Zeigen Sie, dass in der Menge $\mathbb{R}[x] \times (\mathbb{R}[x] \setminus \{0\})$ durch

$$(g, h) \sim (p, q) \Leftrightarrow gq = ph$$

eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

- (b) Sei $\mathbb{R}(x)$ die Menge der Äquivalenzklassen. Die zu $(g, h) \in \mathbb{R}[x] \times (\mathbb{R}[x] \setminus \{0\})$ gehörige Äquivalenzklasse sei mit $\frac{g}{h}$ bezeichnet. Damit ist $\frac{g}{h} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow gq = ph$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}(x)$ mit den Verknüpfungen

$$\frac{g}{h} + \frac{p}{q} := \frac{gq + hp}{hq} \quad \text{und} \quad \frac{g}{h} \cdot \frac{p}{q} := \frac{gp}{hq}$$

zu einem Körper wird.

(Hinweis: Dass $\frac{g}{h} + \frac{p}{q} \in \mathbb{R}(x)$ und $\frac{g}{h} \cdot \frac{p}{q} \in \mathbb{R}(x)$ gilt, muss nicht nachgewiesen werden, dies ist offensichtlich. Weisen Sie aber alle Körperaxiome nach, und geben Sie insbesondere neutrales Element und Inverses bzgl. der Addition bzw. Multiplikation an. Man nennt $\mathbb{R}(x)$ den Körper der rationalen Funktionen.)

(Aufgaben 14.18 und 14.19 - siehe Seite 6)

Aufgabe 14.18 (5 Punkte)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{1000}x_3 &= 1 \\ \frac{1}{100}x_1 - \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_3 &= \frac{11}{10} \\ \frac{1}{100}x_1 - \frac{1}{1000}x_2 + \frac{1}{10}x_3 &= \frac{111}{100}\end{aligned}$$

- (a) durch exakte Rechnung (in $\mathbb{Q}$) und
- (b) numerisch mit Hilfe eines Taschenrechners, wobei Sie nach jedem Schritt auf drei Nachkommastellen runden.

Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse aus (a) und (b).

Aufgabe 14.19 (5 Punkte)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{1000}x_3 &= 1 \\ \frac{1}{100}x_1 - \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_3 &= \frac{11}{10} \\ \frac{1}{100}x_1 - \frac{1}{10}x_2 + \frac{1001}{10000}x_3 &= \frac{21}{10}\end{aligned}$$

- (a) durch exakte Rechnung (in $\mathbb{Q}$) und
- (b) numerisch mit Hilfe eines Taschenrechners, wobei Sie nach jedem Schritt auf drei Nachkommastellen runden.

Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse aus (a) und (b).