

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Aufgaben für die Übungen vom 24. bis 26.04.2013

Aufgabe Ü2.1

Bestimmen Sie Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ so, dass sie jeweils die folgende Gleichung erfüllen:

- (a) $\text{ggT}(108, 34) = s \cdot 108 + t \cdot 34$
- (b) $\text{ggT}(337, 105) = s \cdot 337 + t \cdot 105$

Aufgabe Ü2.2

Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die Restklasse $[a]$ von a (modulo n) besteht aus allen ganzen Zahlen, die bei Division durch n den gleichen Rest ergeben wie a , d.h. $[a] := \{b \in \mathbb{Z} \mid b \bmod n = a \bmod n\}$. Die Menge der Restklassen modulo n sei mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ bezeichnet.

- (a) Ermitteln Sie die Additionstafeln von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Lesen Sie daraus die Lösung der Gleichung $[2] + [x] = [1]$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ bzw. $[2] + [x] = [3]$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ab.
- (b) Stellen Sie die Multiplikationstafel der von $[0]$ verschiedenen Restklassen $[a] \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ auf, für die $\text{ggT}(10, a) \neq 1$ gilt. Geben Sie außerdem die Lösungen $[x] \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ der Gleichungen $[5] \cdot [x] = [5]$, $[5] \cdot [x] = [0]$ und $[6] \cdot [x] = [0]$ an. Sind die Lösungen eindeutig?
- (c) Berechnen Sie $[3]^6 - [2]^{15} \cdot [4]^3$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Aufgabe Ü2.3

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremde Zahlen und $a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Die simultane Kongruenz

$$\begin{aligned}x &\equiv a \pmod{m} \\x &\equiv b \pmod{n}\end{aligned}$$

ist genau dann lösbar, wenn $\text{ggT}(m, n) \mid (a - b)$.

Aufgabe Ü2.4

Vor einer Schlacht lässt ein General seine Soldaten nacheinander in Reihen von je 5, 6, 7 und 11 aufstellen. Dabei bleiben jeweils drei Soldaten übrig, wenn sie sich in Fünfer-, Siebenerreihen und Elferreihen aufstellen. Dagegen bleibt keiner übrig, wenn sie sich in Sechserreihen aufstellen. Es waren 1200 Bauern zwangsrekrutiert worden. Wieviele waren schlau genug, sich vor der Schlacht heimlich aus dem Staub zu machen?

Aufgabe Ü2.5

Lösen Sie das folgende System linearer Kongruenzen:

$$\begin{aligned}x &\equiv 4 \pmod{5} \\x &\equiv 5 \pmod{8} \\x &\equiv 3 \pmod{7}\end{aligned}$$