

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Aufgaben für die Übungen am 08. und 10.05.2013

Hinweis: Als Ersatz für die durch den Himmelfahrtstag (09. Mai) entfallenden Übungen (betroffene Gruppen: 2, 3 und 4) bieten wir folgenden Termin an: Mittwoch, den 08. Mai 2013 von 15:30 bis 17:00 Uhr im LG 1A, Raum 304.

Aufgabe Ü4.1

Die Hashfunktion $h : S \rightarrow M$ bildet eine große Menge Schlüssel S auf eine kleine Menge M von Speicheradressen ab. Der Fall $|S| > |M|$ impliziert, dass Adresskollisionen beim Hashing unvermeidlich sind, d.h. Elemente aus S haben den gleichen Hashwert, was aber auch im Fall $|S| \leq |M|$ auftreten kann. Die Hashfunktion h definiert zu jedem Datum einen Hashwert, der als Index in der Tabelle verwendet wird. Ein Datum mit dem Schlüssel $x \in S$ wird in der Tabelle nicht an Position x , sondern an der Position $h(x) \in M$ gespeichert. Kommt es zu einer Kollision, d.h. $h(x) = h(y)$ für $x \neq y$, so kann diese mit verschiedenen Methoden aufgelöst werden.

Einfachste Methode für die Kollisionsauflösung ist dabei das sogenannte Chaining, wo in der Hashstabelle an jeder Stelle eine Liste steht. Tritt beim Einfügen eines Elements eine Kollision auf, dann wird der neue Eintrag in die dortige Liste eingetragen. Bei der Suche nach einem Eintrag muss dann nach Berechnen des Hashwertes die entsprechende Liste durchsucht werden. Die einfachste Form einer Hashfunktion mit Chaining ist zum Beispiel für $S \subseteq \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$h : S \rightarrow M \quad \text{mit} \quad h(x) := x \bmod n,$$

wobei $n \geq 2$ eine fest gewählte, natürliche Zahl ist.

Gegeben seien die elf Wörter

{BTU Cottbus , FHL , Zwangsfusion , Kunst-Fehler , Sparmodell , Emmermann-Kommission ,
 Butler-Gutachten , Protest , Volksbegehren , Mogelpackung , Kooperation},

die der Reihe nach in eine Liste mit den Einträgen $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ einzuordnen sind. Als Schlüssel sei die Anzahl der Zeichen eines Wortes verwendet (Leerzeichen werden ignoriert, Bindestriche mitgezählt). Stellen Sie für die o.g. Wörter die Hashtabelle mit Chaining auf, wobei die Hashwerte mittels der Hashfunktion h berechnet werden.

Aufgabe Ü4.2

Sei M eine nichtleere Menge, auf der eine Verknüpfung $\circ : M \rightarrow M$ definiert sei. Bezüglich der Verknüpfung $\circ$ seien die folgenden Regeln betrachtet:

$$(V1) \quad \forall a, b, c \in M : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$(V2) \quad \forall a, b \in M : a \circ b = b \circ a \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(V3) \quad \forall a \in M : \exists e \in M : a \circ e = e \circ a = a \quad (\text{Existenz eines neutralen Elements})$$

$$(V4) \quad \forall a \in M : \exists a^{-1} \in M : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e \quad (\text{Existenz eines inversen Elements})$$

Eine algebraische Struktur $(M, \circ)$ heißt **Halbgruppe**, falls (V1) gilt. Eine Halbgruppe heißt kommutativ, wenn zusätzlich (V2) gilt. Gilt außer (V1) zusätzlich (V3), dann spricht man von einem **Monoid**. $(M, \circ)$ heißt **Gruppe**, falls (V1), (V3) und (V4) gelten. Gelten (V1), (V3), (V4) und zusätzlich (V2), so heißt $(M, \circ)$ kommutative Gruppe oder auch abelsche Gruppe.

Welcher der folgenden Mengen $(M, \circ)$ bilden mit der angegebenen Verknüpfung $\circ : M \times M \rightarrow M$ eine Gruppe, Halbgruppe oder ein Monoid?

- (a) $(M, +)$ jeweils für $M = \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ (wobei $+$ die übliche Addition ist)
- (b) $(M, \cdot)$ jeweils für $M = \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ (wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation ist)
- (c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \circ)$ mit $a \circ b = |a \cdot b|$
- (d) $(\mathbb{R}, \circ)$ mit $a \circ b = |a - b|$
- (e) $(\mathbb{R}, \circ)$ mit $a \circ b := \frac{1}{2}(a + b)$
- (f) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \circ)$ mit $a \circ b = |a \cdot b|$
- (g) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \circ)$ mit $(a, b) \circ (c, d) = (a + c, b + d)$

Aufgabe Ü4.3

Gegeben seien die Mengen $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \circ), (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \circ), (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \circ)$ und $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \circ)$, wobei $\circ : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die übliche (Restklassen)multiplikation sei.

- (a) Welche der Mengen sind Gruppen?
- (b) Untersuchen Sie bei den Mengen, die keine Gruppe sind, welche ihrer Elemente das Entstehen einer Gruppe verhindert. Entfernen Sie aus den betreffenden Gruppen die „störenden“ Elemente, so dass eine Gruppe entsteht, und geben Sie diese Gruppen an.

Aufgabe Ü4.4

Aus chemischen Grundstoffen können durch Mischung neue Substanzen gewonnen werden. Mischt man Schwefelsäure und die Base Natronlauge in geeignetem Verhältnis miteinander, dann entsteht Wasser. Säuren mit Wasser verdünnt ergeben wieder Säuren, ebenso lassen sich Basen mit Wasser verdünnen. Betrachten Sie die Menge $M := \{\text{Wasser, Schwefelsäure, Natronlauge}\}$ mit der Verknüpfung $\circ : M \times M \rightarrow M$, die für das Mischen zweier Substanzen aus M steht.

- (a) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für M auf.
- (b) Bildet die Menge M mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe?

Aufgabe Ü4.5

Untersuchen Sie, ob die Logarithmus-Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \ln(x)$ einen Isomorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$ darstellt.

Aufgabe Ü4.6

Gegeben seien die Mengen $X := \{1, 2, 3, 4\}$ und $Y := \{a, b, c, d\}$, die jeweils eine innere Verknüpfung $\circ$ bzw. $\bullet$ mit den folgenden Verknüpfungstafeln besitzen:

$\circ$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\bullet$	a	b	c	d
a	d	c	a	b
b	c	d	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

- (a) Weisen Sie nach, dass es sich bei den Strukturen $(X, \circ)$ und $(Y, \bullet)$ um Gruppen handelt.
- (b) Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus gibt, der die Gruppe $(X, \circ)$ auf $(Y, \bullet)$ abbildet.