

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Aufgaben für die Übungen vom 15. bis 17.05.2013

Aufgabe Ü5.1

Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

- (a) $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ mit $f(z) := 2z$
- (b) $g : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}_{\geq 0}, \cdot)$ mit $g(z) := \frac{1}{2}(z^2 + 1)$
- (c) $h : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ mit $h(z) := z + 1$

Aufgabe Ü5.2

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $g \in G$ irgendein Element. Beweisen Sie, dass die durch $f(x) := g \circ x \circ g^{-1}$ gegebene Abbildung $f : G \rightarrow G$ ein Isomorphismus von Gruppen ist. Welchen Wert hat $f(x)$ für beliebiges $x \in G$, falls $(G, \circ)$ kommutativ ist?

Aufgabe Ü5.3

(a) Stellen Sie folgende Permutationen aus S_4 in Zyklenschreibweise dar:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Stellen Sie folgende in Zyklenschreibweise gegebene Permutationen aus S_4 als Wertetafeln dar:

$$\tau_1 := (3412) \quad , \quad \tau_2 := (134) \quad , \quad \tau_3 := (14)(23) \quad , \quad \tau_4 := (42)$$

(c) Berechnen Sie die folgenden Verknüpfungen von Permutationen aus S_5 :

$$(1342) \circ (251) \quad \text{und} \quad (12) \circ (35) \circ (12) \circ (54)$$

Geben Sie das Ergebnis in Zyklenschreibweise an. Vereinbarung: Es wird immer die rechts stehende Verknüpfung zuerst ausgeführt!

(d) Bestimmen Sie Permutationen $x, y \in S_4$, sodass $(1234) \circ x = (1324)$ bzw. $y \circ (1234) = (1324)$ gilt.

Aufgabe Ü5.4

Welche der folgenden Gruppen ist zyklisch? Geben Sie in diesem Fall das erzeugende Element an.

- (a) $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
- (b) $(\mathbb{Z}, +)$
- (b) $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}^*, \cdot)$ mit $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}^* := \{[1], [2], [3], [4]\}$
- (c) $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \cdot)$ mit $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^* := \{[1], [2], [3], [4], [5], [6]\}$
- (d) $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^*, \cdot)$ mit $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^* := \{[1], [3], [5], [7]\}$

Aufgabe Ü5.5

Sei $(U, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ und $U \neq \{0\}$. Zeigen Sie: Ist u die kleinste positive Zahl in U , so gilt $U = u\mathbb{Z} = \{u \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.