Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Aufgaben für die Übungen vom 29. bis 31.05.2013

Aufgabe Ü7.1

(a) Sei K ein kommutativer Ring und $K[x]$ der Polynomring über K. Zeigen Sie: Ein Element $x_0 \in K$ ist genau dann mehrfache Nullstelle von $f \in K[x]$, wenn x_0 eine gemeinsame Nullstelle von f und der ersten Ableitung f' ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) und dem Euklidischen Algorithmus für Polynome die mehrfachen Nullstellen von $f(x) := x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2$

(c) Sei $n \geq 2$ eine Primzahl. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Das Polynom $f \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[x]$ mit $f(x) := x^n - x$ besitzt mehrfache Nullstellen.

Aufgabe Ü7.2

In der Vorlesung wurde ein Algorithmus zum Aufdecken von Übertragungsfehlern als Anwendung der Polynomdivision in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vorgestellt. Das Codewort

10110 01101

soll sicher übertragen werden.

(a) Bestimmen Sie gemäß Schritt 2 des oben genannten Algorithmus das zu übertragende Wort $g(x) \cdot q(x)$, wobei $g(x) := x^3 + 1$ dabei als Generatorpolynom diene.

(b) Bestimmen Sie aus dem übertragenen Wort $g(x) \cdot q(x)$ das Original $f(x)$.

(c) Statt $g(x) \cdot q(x)$ wurde

10001 10110 110

empfangen. Wird der Übertragungsfehler erkannt?

Aufgabe Ü7.3

(a) Beweisen Sie im Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ unter alleiniger Verwendung der Körperaxiome, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

(b) Es seien A und B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$, und es gelte $x < y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$. Gibt es dann stets ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in A$ und $y \in B$ gilt $x < c < y$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$.

(d) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die nachfolgende Ungleichungen erfüllen.

(i) $x^2 > x + 2$ (ii) $\dfrac{x-3}{x+1} > \dfrac{x+2}{x-1}$