

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Aufgaben für die Übungen vom 12. bis 14.06.2013

Aufgabe Ü9.1

Gegeben seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad d := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie zwei verschiedene Basen des Unterraums $U := \text{span}(a, b, c, d)$.
- (b) Geben Sie die Dimension von U an.
- (c) Ergänzen Sie eine der beiden Basen aus (a) zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.
- (d) Prüfen Sie, ob die Vektoren $x = (8, -6, 2)^T$ und $y = (4, -2, -6)^T$ Elemente aus U sind. Wenn ja, dann geben Sie die Koordinaten von x bzw. y bzgl. der in (a) berechneten Basen an. Geben Sie außerdem die Koordinaten von x und y bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe Ü9.2

Gegeben seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $V := \text{span}(x, y, z)$.
- (b) Bestimmen Sie eine Basis von $U + V$, wobei U der Unterraum aus Aufgabe Ü9.1 ist.
- (c) Geben Sie die Dimensionen von V , $U + V$ und $U \cap V$ an, wobei U der Unterraum aus Aufgabe Ü9.1 ist.

Aufgabe Ü9.3

Bestimmen Sie für die folgenden Vektorräume jeweils eine Basis:

- (a) $U_1 := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\} \subset \mathbb{R}^3$
- (b) $U_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$
- (c) $U_3 := \text{span}(x + 1, x^2 + x - 1, x^2 + x, x^2 - x) \subset \mathbb{R}[x]$

Aufgabe Ü9.4

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten!

- (a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f((x, y, z)) = (2x + 3y + 5z, x - y - 2z)$
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f((x, y)) = x \cdot y$
- (c) $f : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ mit $f(g) = g(c)$ für festes $c \in \mathbb{R}$.