

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Aufgaben für die Übungen vom 19. bis 21.06.2013

Aufgabe Ü10.1

Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f((-1, 2, 0)^T) = (3, -1)^T$, $f((2, 0, -2)^T) = (1, -1)^T$ und $f((-2, -4, 2)^T) = (-7, 5)^T$? Falls ja, dann geben Sie die Abbildungsmatrix von f bzgl. der Standardbasen an.

Aufgabe Ü10.2

Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4, x_2 + x_3 + x_4)^T.$$

- (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f , wobei für $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$
- (i) jeweils die Standardbasis,
 - (ii) die Basis $B_{\mathbb{R}^4} = \{(1, 0, 0, 0)^T, (1, 1, 0, 0)^T, (1, 1, 1, 0)^T, (1, 1, 1, 1)^T\}$ bzw. die Standardbasis für $\mathbb{R}^3$,
 - (iii) die Basis $B_{\mathbb{R}^4} = \{(1, 0, 0, 0)^T, (1, 1, 0, 0)^T, (1, 1, 1, 0)^T, (1, 1, 1, 1)^T\}$ bzw. $B_{\mathbb{R}^3} = \{(0, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 1, 1)^T\}$
- verwendet werden. Geben Sie in allen Fällen die notwendigen Rechenschritte an, um $f((1, 2, 3, 4)^T)$ zu berechnen.
- (b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern und Bild von f bzgl. der Standardbasen von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$.
- (c) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Dimensionsformel $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f))$ für $f : V \rightarrow W$.

Aufgabe Ü10.3

Geben Sie jeweils ein einfaches Beispiel für eine

- (a) bijektive,
- (b) surjektive, aber nicht injektive,
- (c) injektive, aber nicht surjektive,
- (d) weder injektive noch surjektive

lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ an.

Aufgabe Ü10.4

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie den Rang der Matrizen.
- (b) Berechnen Sie alle möglichen Produkte $X \cdot Y$ für $X, Y \in \{A, B, C, D\}$.