

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Aufgaben für die Übungen vom 03. bis 05.07.2013

Aufgabe Ü12.1

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrcl} -x & + & 6y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 4y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

- (a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des Gleichungssystems an.
- (b) Bestimmen Sie Zeilenstufenform $(\tilde{A}, \tilde{b})$ der erweiterten Koeffizientenmatrix. Geben Sie dabei die verwendeten elementaren Zeilenumformungen an, wobei $q_{ij}(\lambda)$ die Addition des λ -fachen der j -ten Zeile zur i -ten Zeile bezeichnet, p_{ij} den Tausch der Zeilen i und j sowie $m_i(\lambda)$ die Multiplikation der i -ten Zeile mit $\lambda \neq 0$.
- (c) Ist das Gleichungssystem lösbar? Wenn ja, dann geben Sie die Lösungsmenge an.
- (d) Bestimmen Sie die reduzierte Zeilenstufenform (A', b') der erweiterten Koeffizientenmatrix (mit Angabe der Operationen analog zu (a)). Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe Ü12.2

Ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 6 \end{array}$$

lösbar? Wenn ja, dann bestimmen Sie die Lösungsmenge und geben Sie diese in der Form $x = x_p + x_h$ an, wobei x_p eine partikuläre Lösung des gegebenen inhomogenen und x_h die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist.

Aufgabe Ü12.3

Ist das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösbar? Wenn ja, dann bestimmen Sie die Lösungsmenge und geben Sie diese in der Form $x = x_p + x_h$ an, wobei x_p eine partikuläre Lösung des gegebenen inhomogenen und x_h die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist.

(Aufgaben Ü12.4 und Ü12.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe Ü12.4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3+t \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie außerdem alle Werte für $t \in \mathbb{R}$ an, für die das Gleichungssystem ggf. keine Lösung besitzt.

Aufgabe Ü12.5

Gegeben seien der Vektorraum $U = \text{span}\{(1, 0, 2, 1)^T, (2, 1, 0, 1)^T, (0, 2, 2, 0)^T\} \subset \mathbb{R}^4$, der Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ mit der Basis $B = \{1, 1-x, 1+x^2, 1-x^3\}$ und eine lineare Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ mit

$$f(a, b, c, d) := a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f und geben Sie die notwendigen Rechenschritte an, um $f(z)$ für $z = (-4, -1, 6, -1)^T \in U$ mit Hilfe von A zu berechnen. Bestimmen Sie außerdem eine Basis von Kern $\ker(f)$ und Bild $\text{im}(f)$.