Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 2 (Lineare Algebra)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Sommersemester 2013

Aufgaben für die Zusatzübung am 25./26.07.2013

Aufgabe Ü15.1

Ein homogenes lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit der quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$ hat nur die triviale Lösung $\mathbf{0}$,

- ☐ (a) wenn $\mathrm{rg}(A) = n$ gilt.
- ☐ (b) wenn die Zeilen von A linear abhängig sind.
- ☐ (c) wenn die Spalten von A linear abhängig sind.

Aufgabe Ü15.2

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Welche der folgenden Behauptungen ist falsch?

- ☐ (a) Es gibt eine bijektive lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ mit $f(1,1) = (1,2)$ und $f(1,2) = (1,1)$.
- ☐ (b) Es gibt eine bijektive lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ mit $f(1,1) = (1,1)$ und $f(1,2) = (1,2)$.
- ☐ (c) Es gibt eine bijektive lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ mit $f(1,1) = (1,2)$ und $f(1,2) = (1,2)$.

Aufgabe Ü15.3

A und B seien zwei 3×3-Matrizen mit $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 3$. Welchen Rang hat die Matrix $C = A \cdot B^T$?

- ☐ (a) $\mathrm{rg}(A) = 9$
- ☐ (b) $\mathrm{rg}(A) = 6$
- ☐ (c) $\mathrm{rg}(A) = 3$

Aufgabe Ü15.4

Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt stets:

- ☐ (a) $\dim(V) = \dim(\ker(f)) - \dim(\mathrm{im}(f))$
- ☐ (b) $\dim(W) = \dim(\ker(f)) - \dim(\mathrm{im}(f))$
- ☐ (c) $V = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$
- ☐ (d) $W = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$
- ☐ (e) Keine der vorgenannten Alternativen (a) bis (d) trifft zu.

(Aufgaben Ü15.5 bis Ü15.16 - siehe Seite 2f.)

Aufgabe Ü15.5
Berechnen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1620 und 525, sowie ganze Zahlen s und t mit $\mathrm{ggT}(1620, 525) = s \cdot 1620 + t \cdot 525$. Leiten Sie aus Ihren Rechnungen die inverse Restklasse von $35 \in \mathbb{Z}/108\mathbb{Z}$ ab.

Aufgabe Ü15.6
Sei $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen sie die Inverse der folgenden Matrix, falls das möglich ist:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ t & 1 & t \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $Ax = (1, 2t, 3)^T$ lösbar? Geben Sie alle Lösungen an.

Aufgabe Ü15.7
Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} s & 2s & (2s+t) \\ s & (3s-4t) & (s+t) \\ -s & (-s-4t) & -2s \end{pmatrix}$$

Aufgabe Ü15.8
Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden. Bestimmen Sie die Koordinaten von $p = \big(-5, -6, -9, 5\big)^T$ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe Ü15.9
Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \, .$$

Bestimmen Sie außerdem eine Basis des Zeilenraumes und eine Basis des Spaltenraumes der Matrix A.

Aufgabe Ü15.10
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Eigenräume, die sich für $a = 1$ und $b = 1$ ergeben.

Aufgabe Ü15.11
Mit GL_n sei die Menge der regulären, reellen $(n \times n)$-Matrizen bezeichnet, wobei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Weisen Sie nach, dass GL_n zusammen mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

(b) Ist $\big(\mathrm{GL}_n, \cdot\big)$ auch kommutativ?

(c) Zeigen Sie, dass $U := \big\{A \in \mathrm{GL}_n \;\big|\; A \text{ ist obere Dreiecksmatrix}\big\}$ eine Untergruppe von $\big(\mathrm{GL}_n, \cdot\big)$ ist.

(Aufgaben Ü15.12 bis Ü15.16 - siehe Seite 3)

Aufgabe Ü15.12
Gegeben sei folgende Teilmenge der (2×2)-Matrizen:

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Matrixmultiplikation über $\mathbb{R}$ ist kommutativ.

(b) C ist abgeschlossen bezüglich der Matrixaddition und Matrixmultiplikation.

(c) Bestimmen Sie neutrales Element und Inverse bzgl. der Matrixaddition bzw. Matrixmultiplikation.

Hinweis: C wird damit zu einem Körper.

Aufgabe Ü15.13
Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\big((-1,0,1)^T\big) = \big(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big)^T \;\;,\;\; f\big((3,1,0)^T\big) = \big(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big)^T \text{ und } f\big((4,2,4)^T\big) = (4,2,2)^T \;\; ?$$

Wenn ja, dann geben Sie eine Abbildungsmatrix bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe Ü15.14
Behauptung: Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\big((-1,0,1)^T\big) = \big(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big)^T \;\;,\;\; f\big((3,1,0)^T\big) = \big(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big)^T \text{ und } f\big((4,2,2)^T\big) = (4,2,2)^T \;\; .$$

Der Existenznachweis wird durch Berechnung der Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 4-3a & a \\ b-\frac{1}{2} & 2-3b & b \\ c-\frac{1}{2} & 2-3c & c \end{pmatrix}$$

erbracht, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden dürfen. Aus A folgt, dass f injektiv und surjektiv ist.

Was ist an den obigen Behauptungen alles falsch und warum? Welche Fehler wurden bei der Rechnung gemacht? Berichtigen Sie alle Fehler, d.h. überprüfen Sie die behauptete Linearität, Injektivität und Bijektivität von f und berichtigen Sie ggf. die Abbildungsmatrix. (Begründungen nicht vergessen!)

Aufgabe Ü15.15
Sei $U = \text{span}\big((1,2,3)^T\big)$ und der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ habe die Basis $B = \big\{(1,0,0)^T \;,\; (1,1,0)^T \;,\; (1,1,1)^T\big\}$. Die lineare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f\big((x,y,z)^T\big) := \big(x \;,\; x+y+z \;,\; z\big)^T \;.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f bzgl. der o.g. Basen von U bzw. $\mathbb{R}^3$, und geben Sie die notwendigen Rechenschritte an, um $f(p)$ für $p = (5,10,15)^T$ mit Hilfe der Abbildungsmatrix auszuwerten.

Aufgabe Ü15.16
Elementare Zeilenumformungen haben für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ die folgende Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ ergeben:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$.