BTU Cottbus-Senftenberg, Lehrstuhl Numerische und Angewandte Mathematik
Vorlesung Interpolation und Approximation, Sommersemester 2014
zur Übung am 13. Juni 2014 - Thema: Rationale Interpolation

Definition 1

Zu paarweise verschiedenen Sützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und Stützwerten $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sind die *inversen Differenzenquotienten* wie folgt definiert:

$$\nabla^0(x_i)f \;:=\; f_i$$

für $i = 0, 1, \ldots, n$ und

$$\nabla^k(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_i)f \;:=\; \frac{x_i - x_{k-1}}{\nabla^{k-1}(x_0, \ldots, x_{k-2}, x_i)f \;-\; \nabla^{k-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})f}$$

für $i = k, k+1, \ldots, n$ und $k = 1, 2, \ldots, n$.

Satz 1

Gegeben seien $n+1$ Punkte $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$ mit paarweise verschiedenen Sützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Existieren die inversen Differenzenquotienten

$$a_j := \nabla^j(x_0, \ldots, x_j)f$$

für $j = 0, 1, \ldots, n$, dann bildet der mit diesen Koeffizienten gebildete Kettenbruch

$$r(x) \;=\; a_0 + \cfrac{x - x_0}{a_1 + \cfrac{x - x_1}{a_2 + \cfrac{x - x_2}{\ddots \quad a_{n-1} + \cfrac{x - x_{n-1}}{a_n}}}} \;=\; a_0 + \frac{x - x_0\,|}{|\,a_1} + \frac{x - x_1\,|}{|\,a_2} + \ldots + \frac{x - x_{n-1}\,|}{|\,a_n}$$

eine rationale Interpolierende, d.h. es gilt $r(x_j) = f_j$ für $j = 0, 1, \ldots, n$.

Satz 2

Zu $n+1$ Punkten $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$ mit paarweise verschiedenen Sützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sei die rationale Interpolierende $r(x)$ gemäß Satz 1 berechnet worden. Der Kettenbruch sei außerdem in die Form

$$r(x) \;=\; \frac{p(x)}{q(x)}$$

überführt worden. Dann haben die Polynome p und q (maximal) folgenden Grad:

(a) $\deg(p) = \deg(q) = \dfrac{n}{2}$, falls n gerade.

(b) $\deg(p) = \dfrac{n-1}{2} + 1$ und $\deg(q) = \dfrac{n-1}{2}$, falls n ungerade.

Satz 3

Falls

$$\nabla^j(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_j)f \;=\; \nabla^j(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1})f \;=\; \ldots = \nabla^j(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_n)f$$

für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, d.h. die $(j+1)$-ten inversen Differenzenquotienten existieren nicht, dann wird die Interpolierende zu den $n+1$ Vorgaben durch die Funktion

$$R(x) \;=\; a_0 + \frac{x - x_0\,|}{|\,a_1} + \frac{x - x_1\,|}{|\,a_2} + \ldots + \frac{x - x_{j-1}\,|}{|\,a_j}$$

gegeben mit $a_i := \nabla^i(x_1, \ldots, x_i)f$ für $i = 0, 1, \ldots, j$. $r(x)$ ist als Kettenbruch also nicht so lang wie erwartet, erfüllt aber alle Interpolationsvorgaben $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$. Die Funktion $r(x)$ nennt man in diesem Fall „*entartet*“.

Aufgabe 1

Beweisen Sie Satz 1 durch direkte Rechnung für den Fall $n = 2$.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Punkte (x_i, f_i) gemäß der Tabelle

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	2	3
f_i	0	1	1	$\frac{5}{9}$

(1)

bzw.

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
f_i	0	1	3	1

(2)

(a) Diskutieren Sie die Lösbarkeit der rationalen Interpolationsaufgabe zu den Vorgaben (1) bzw. (2) jeweils durch rationale Funktionen der Gestalt

$$r_1(x) \;=\; \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \;=\; \frac{ax+b}{ux^2+vx+w} \qquad \text{bzw.} \qquad r_2(x) \;=\; \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \;=\; \frac{rx^2+sx+t}{cx+d}\,.$$

Lösen Sie dazu das homogene lineare Gleichungssystem $p_j(x_i) - f_i \cdot q_j(x_i) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 1$ bzw. $j = 2$. Gibt es unerreichbare Punkte?

(b) Lösen Sie die rationalen Interpolationsaufgaben zu den Vorgaben (1) und (2) mit Hilfe der inversen Differenzenquotienten, falls dies möglich ist. Verwenden Sie dabei die Stützstellen x_0, x_1, x_2, x_3 in der gegebenen Reihenfolge.

(c) Lösen Sie die rationale Interpolationsaufgabe zu (1) mit Hilfe der inversen Differenzenquotienten, wobei die Stützstellen in der Reihenfolge

(i) x_0, x_2, x_3, x_1

(ii) x_2, x_0, x_3, x_1

zu verwenden sind. Was beobachten Sie dabei?

(d) Die Daten (1) sollen um den Punkt $(x_4, f_4) = \left(6, -\frac{4}{3}\right)$ ergänzt werden. Lösen Sie (falls möglich) die entstehende rationale Interpolationsaufgabe mit Hilfe der inversen Differenzenquotienten.

Aufgabe 3

Beweisen Sie Satz 2.