

Satz 1

Sei E ein euklidischer Raum und $U \subseteq E$ ein Unterraum. Ein $u^* \in U$ ist genau dann beste Approximation aus U an ein $f \in E$, wenn $\langle f - u^*, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$.

Satz 2

Sei E ein euklidischer Raum und $U \subseteq E$ ein Unterraum. Sei $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ eine Basis von U und $u^* \in U$ sei beste Approximation an $f \in E$. Dann gilt $u^* = \sum_{i=0}^n a_i f_i$, wobei die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=0}^n a_i \langle f_i, f_k \rangle = \langle f, f_k \rangle, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

sind.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die beste Approximation $p_n \in \mathbb{P}_n$ an die Daten

i	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2
y_i	0	-1	2	1

bzgl. der $\|\cdot\|_2$ -Norm für $n = 0, 1, 2, 3$. Geben Sie ohne Rechnung den Approximationsfehler im Fall $n = 3$ an.

Aufgabe 2

Gegeben seien die folgenden Daten (x_i, y_i) :

i	1	2	3	4	5
x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
y_i	1	0	2	0	-1

Bestimmen Sie die beste Approximation an die Daten (x_i, y_i) bzgl. der $\|\cdot\|_2$ -Norm aus dem euklidischen Raum $E = \text{span}(f_0, f_1, f_2)$, wobei die folgenden Basisfunktionen f_0, f_1, f_2 zu verwenden sind:

- (a) $f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2$
- (b) $f_0(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad f_1(x) = \cos(\pi x), \quad f_2(x) = \sin(\pi x)$
- (c) $f_0(x) = x^2, \quad f_1(x) = \sin(\pi x), \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Aufgabe 3

Implementieren Sie eine Matlab-Funktion `euklidApproxKoeff.m`, die zu $m \geq 2$ Datenpunkten $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ [mit paarweise verschiedenen $x_1, \dots, x_m$] die beste Approximation aus $U = \text{span}(f_0, f_1, \dots, f_n)$ berechnet, wobei eine beliebige Basis $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ von U übergeben werden kann. Die Funktion soll die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ der besten Approximierenden $p(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x)$ als Ergebnis zurückgeben.

Aufgabe 4

Bei der Approximation von diskreten Daten $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ werden die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ durch Lösung der Normalgleichungen $A^T A a = A^T b$ bestimmt, wobei $A = (a_{ji})$ definiert ist durch $a_{ji} := (f_i(t_j))$ für $0 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ und $a := (a_1, \dots, a_n)^T$, $b := (y_1, \dots, y_m)^T$. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^m$ das Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^m x_j y_j$. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem in Satz 2 zu $A^T A a = A^T b$ äquivalent ist.

Aufgabe 5

Wir betrachten für $f, g \in C[0, 1]$ das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$. Berechnen Sie zu $f : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^4 + x - 1$ die beste Approximation aus $U = \text{span}(1, x, x^2)$.