

Definition 1: Zwei Elemente $f, g \in E$ eines euklidischen Vektorraums E heißen orthogonal, wenn $\langle f, g \rangle = 0$.

Definition 2: Sei E ein euklidischer Vektorraum. Eine Menge $\{f_0, f_1, \dots, f_n\} \subseteq E$ heißt Orthonormalsystem, wenn $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle f_i, f_i \rangle = 1$ gilt. Sind $f_0, f_1, \dots, f_n$ linear unabhängig, dann heißt $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ Orthonormalbasis.

Satz 1: Jeder Unterraum eines euklidischen Vektorraumes hat eine Orthonormalbasis. Insbesondere gilt: Sind $g_0, g_1, \dots, g_n$ linear unabhängig, dann existieren $f_i \in U_i = \text{span}(g_0, g_1, \dots, g_i)$, so dass $\{f_0, f_1, \dots, f_i\}$ für $i = 0, \dots, n$ eine Orthonormalbasis von U_i ist.

Der Beweis von Satz 1 ergibt sich aus dem **Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren:**

$$h_0 := g_0, \quad h_k := g_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle g_k, h_j \rangle}{\langle h_j, h_j \rangle} \cdot h_j, \quad k = 1, \dots, n, \quad f_k := \frac{h_k}{\|h_k\|}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Satz 2: Sei E ein euklidischer Raum. Zu $q \in E$ sei $P(q)$ die orthogonale Projektion von q auf den linearen Unterraum $U \subset E$. Dann gilt $\|q - P(q)\| < \|q - w\|$ für alle $w \in U \setminus \{q\}$, d.h. $P(q)$ ist die eindeutig bestimmte beste Approximation von q in U . Ist $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ eine Orthonormalbasis von U , dann gilt

$$P(q) = \sum_{i=0}^n \langle f_i, q \rangle f_i.$$

Aufgabe 1

Sei E ein euklidischer Vektorraum und $\|\cdot\|$ die durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ definierte Norm. Zeigen Sie den Satz des Thales für beliebige $x, y \in E$:

$$\|x\| = \|y\| \Leftrightarrow (x - y) \perp (x + y)$$

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Für reellwertige Funktionen $f, g : [-n, n] \cap \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ sei das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i=-n}^n f(i)g(i)$$

definiert.

- Bestimmen Sie ein System $\{f_0, f_1, f_2\}$ orthonormierter Polynome $f_0 \in \mathbb{P}_0$, $f_1 \in \mathbb{P}_1$ und $f_2 \in \mathbb{P}_2$ bezüglich des oben definierten Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$, wobei wir unter Polynomen in dieser Aufgabe die Einschränkungen herkömmlicher Polynome auf $[-n, n] \cap \mathbb{Z}$ verstehen wollen.
- Geben Sie das Orthonormalsystem $\{f_0, f_1, f_2\}$ aus (a) für $n = 2$ an, und stellen Sie $p(x) = (x - 1)^2$ für $n = 2$ als Linearkombination der f_0, f_1, f_2 dar.
- Bestimmen Sie für $q(x) = x^3$ für $n = 2$ das Element mit kleinstem Abstand von q aus dem von $\{f_0, f_1, f_2\}$ erzeugten linearen Teilraum V (beste lineare Approximation an q in V), und geben Sie den Minimalabstand an.

Aufgabe 3

Gegeben sei der Raum $C[a, b]$ aller stetigen Funktionen über einem Intervall $[a, b]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(x)v(x) dx$$

für alle $u, v \in C[a, b]$. Bestimmen Sie die beste L_2 -Approximation an $q(x) = \sin(x)$ aus $\mathbb{P}_1[a, b]$, wobei $\mathbb{P}_1[a, b]$ der Vektorraum aller auf $[a, b]$ definierten Geraden ist. Die Rechnungen sollen dabei in den Intervallen

$$[a, b] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{bzw.} \quad [a, b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

durchgeführt werden. Verwenden Sie zur Berechnung einerseits jeweils die Basis $\{1, x\}$ von $\mathbb{P}_1[a, b]$, sowie andererseits eine Orthonormalbasis von $\mathbb{P}_1[a, b]$. Vergleichen und diskutieren Sie den Rechenaufwand bzgl. der verschiedenen Basen.

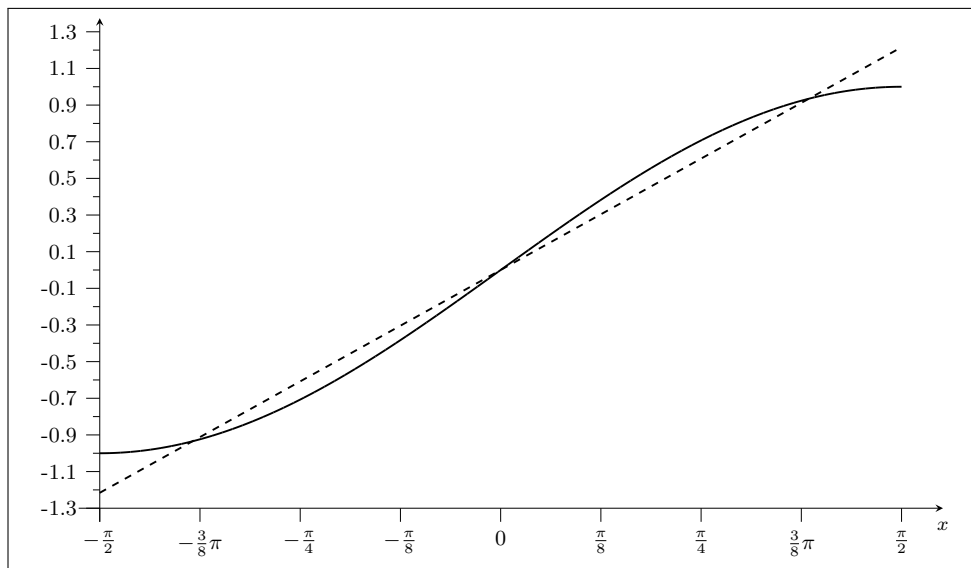


Abb. 1: Die Funktion $q(x) = \sin(x)$ — im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und ihre beste L_2 -Approximation p - - - aus $\mathbb{P}_1[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

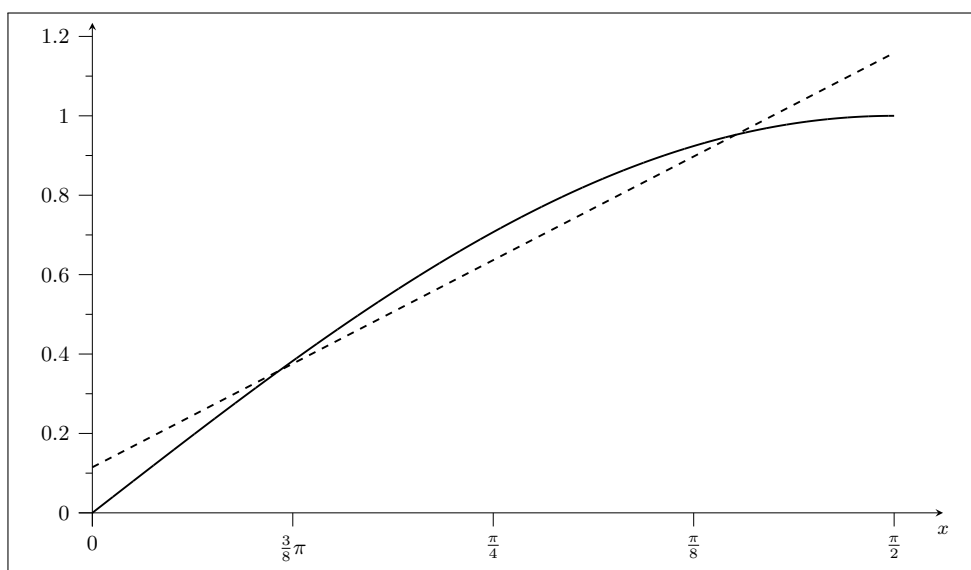


Abb. 2: Die Funktion $q(x) = \sin(x)$ — im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ und ihre beste L_2 -Approximation p - - - aus $\mathbb{P}_1[0, \frac{\pi}{2}]$.