

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2014

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 1 - Abgabe bis Dienstag, 22. April 2014

Aufgabe 1.1 (14 Punkte)

- (a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe $T_f(x)$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $T_f(x)$ gegen $f(x)$?
- (b) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \sin^2(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Weisen Sie außerdem nach, dass für das Restglied $R(x)$ die Abschätzung $|R(x)| \leq \frac{1}{48}$ für alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt.
- (c) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x) = \sin(x) \cos(x) + \cos(2x) + 1$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Weisen Sie außerdem nach, dass für das Restglied $R(x)$ die Abschätzung $|R(x)| < \frac{\pi^4}{20000}$ für alle $x \in [\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}]$ gilt.

Aufgabe 1.2 (8 Punkte)

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Hornerschemas, dass das Polynom $f(x) = 4x^5 - 6x^4 - 13x^3 + 3x^2 - x - 159$ an der Stelle $x = 3$ verschwindet, und spalten Sie den Linearfaktor dieser Nullstelle vom Polynom ab, indem Sie die Koeffizienten des Polynoms g mit $f(x) = (x - 3) \cdot g(x)$ im Hornerschema ablesen.
- (b) Werten Sie mit Hilfe des Hornerschemas das Polynom $f(x) = 3x^6 + 3x^4 + 5x^3 - 2x - 7$ an der Stelle $x = 3$ aus. Stellen Sie f in der Form $f(x) = (x - 3) \cdot g(x) + f(3)$ dar.

Aufgabe 1.3 (5 Punkte)

Entwickeln Sie das Polynom $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x - 10$ mit Hilfe des vollständigen Hornerschemas an der Stelle $x = 2$ in ein Taylorpolynom, und geben Sie sämtliche Ableitungswerte von f an der Stelle $x = 2$ an.

Aufgabe 1.4 (7 Punkte)

Weisen Sie nach, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \quad \text{mit} \quad f(g) := g \cdot x + g(2) \cdot x^4$$

linear ist. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix sowie Basen von Kern und Bild der linearen Abbildung f bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ und $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$. Geben Sie außerdem die notwendigen Rechenschritte an, mit denen das Polynom $p(x) := 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$ durch die Abbildung f mit Hilfe der Abbildungsmatrix ausgewertet wird. (Hinweis: Dabei bezeichnet $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ den Vektorraum aller Polynome vom Höchstgrad $n = 3, 4$.)

(Aufgaben 1.5 bis 1.8 - siehe Seite 2)

Aufgabe 1.5 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, durch die die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(\mathbf{a}_i) := \mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ eindeutig bestimmt ist, wobei

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.6 (5 Punkte)

Programmieren Sie eine Matlab-Funktion zur Berechnung der Determinante einer beliebig gewählten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei die Determinante bzw. auch alle Unterdeterminanten nach der ersten Spalte entwickelt werden sollen. Testen Sie Ihre Funktion an selbst gewählten Beispielen. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen der durch Matlab bereitgestellten Funktion `det.m` und diskutieren Sie Unterschiede zwischen `det.m` und Ihrer eigenen Funktion.

Aufgabe 1.7 (5 Punkte)

Schreiben Sie Matlab-Funktionen, mit deren Hilfe die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x < -1 \\ \max(g(x), h(x)) & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ h(x) & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

an beliebigen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ausgewertet werden kann. Dabei sind $g: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige Funktionen. Beachten Sie, dass f, g und h nicht stetig sein müssen. Es soll möglich sein, f in mehr als einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ auszuwerten. Testen Sie Ihr Programm mit den Funktionen

$$(a) \quad g(x) = \sin(\pi x) \quad \text{und} \quad h(x) = 1 + \cos(\pi x)$$

$$(b) \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{für } x < -2 \\ x + 2 & \text{für } x \geq -2 \end{cases} \quad \text{und} \quad h(x) = \begin{cases} 2 - x^8 & \text{für } x < 1 \\ 3 + x + \cos(\pi x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Stellen Sie die Funktion f jeweils im Intervall $[-3, 3]$ graphisch dar. Verzichten Sie auf die Verwendung der Symbolic Toolbox, sowie auf die Verwendung von `for`- und `while`-Schleifen!

Aufgabe 1.8 (5 Punkte)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion zur Berechnung der Nullstelle einer beliebigen, stetigen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe des Bisektions-Verfahrens. Testen Sie Ihre Funktion zur Berechnung der Nullstellen der Funktionen $f(x) = \ln(x)$ sowie $f_{1,c}(x) = \ln(x) + c$ und $f_{2,c}(x) = x^3 + \cos(cx)$, jeweils für $c = 1$ und $c = 2$, und $f_{3,c,d} = cx - \sin(dx) - 1$ für die Wertepaare $(c, d) = (1, 2)$, $(c, d) = (1, 3)$, $(c, d) = (-1, 2)$ und $(c, d) = (-1, -0.5)$.