

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2014

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 2 - Abgabe bis Dienstag, 06. Mai 2014

Aufgabe 2.1 (5 Punkte)

Bestimmen Sie unter Verwendung des Hornerschemas alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$f(x) := x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 26x^2 + 13x - 30 = 0.$$

(Hinweis: Bestimmen Sie zuerst alle ganzzahligen Lösungen.)

Aufgabe 2.2 (3 Punkte)

Von der Funktion $f(x)$ seien die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte an den Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_4$ bekannt:

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	15	-1	1	15	83

Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_4x^4$ vom maximalen Grad 4 nach der Lagrange-Darstellung $p(x) = \sum_{i=0}^4 f(x_i)L_i(x)$ mit den Lagrange-Polynomen $L_0, \dots, L_4$

Aufgabe 2.3 (6 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ sei im Intervall $[10, 12]$ durch ein quadratisches Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit drei äquidistanten Stützstellen $x_0 = 10$, $x_1 = 11$ und $x_2 = 12$ interpoliert.

(a) Zeigen Sie, dass der Interpolationsfehler an der Stelle $x = 11.1$ betragsmäßig kleiner als $\frac{1}{3}10^{-4}$ ist.

(b) Bestimmen Sie das Vorzeichen der Fehlerfunktion $g(x) = f(x) - p(x)$ für beliebige $x \in [10, 12]$.

(Hinweis: Es wird nicht verlangt, das Interpolationspolynom explizit auszurechnen!)

Aufgabe 2.4 (12 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \exp(-2x)$ soll im Intervall $[-1, 1]$ durch ein Polynom $p_n(x)$ höchstens vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit $n + 1$ äquidistanten Stützstellen $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$ interpoliert werden.

(a) Bestimmen Sie p_n für $n = 2$ und stellen Sie p_2 in der Form $p_2(x) = ax^2 + bx + 1$ dar.

(b) Schätzen Sie den Interpolationsfehler $\|f - p_2\|_{\infty, [-1, 1]}$ nach den in der Vorlesung behandelten Fehlerabschätzungen

$$(i) \|f - p\|_{\infty, [-1, 1]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [-1, 1]}}{(n+1)!} \left\| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right\|_{\infty, [-1, 1]} \quad \text{bzw.}$$

$$(ii) \quad \|f - p\|_{\infty, [-1, 1]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [-1, 1]}}{4 \cdot (n+1)} \cdot h^{n+1}$$

ab, wobei $h > 0$ die Gitterweite des äquidistanten Gitters ist.

- (c) Berechnen Sie den Interpolationsfehler $\|f - p_2\|_{\infty, [-1, 1]}$ näherungsweise numerisch (z.B. mit Hilfe von Matlab). Vergleichen Sie mit (b).
- (d) Wie groß muss n gewählt werden, damit der Interpolationsfehler nach der Abschätzung aus (b) (ii) garantiert kleiner als 10^{-10} ist?

(Hinweis zu (d): Das gesuchte $n \in \mathbb{N}$ kann numerisch z.B. mit Matlab bestimmt werden.)