

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2014

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 4 - Abgabe bis Donnerstag, 22. Mai 2014, 12 Uhr im HG, Raum 4.49

Aufgabe 4.1 (8 Punkte)

Sind $x_0, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene Stützstellen mit vorgeschriebenen Funktionswerten $f_0, \dots, f_n$, dann hat die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms p die Form

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f_j L_j(x),$$

wobei L_j die Lagrange-Polynome sind. In der Übung am 25. April 2014 wurde gezeigt, dass das Interpolationspolynom p die baryzentrische Darstellung

$$p(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{b_j}{x - x_j} f_j}{\sum_{j=0}^n \frac{b_j}{x - x_j}} \quad \text{mit den baryzentrischen Gewichten} \quad b_j := \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i) \right)^{-1}$$

besitzt.

- Wieviele Punktoperationen sind erforderlich, um $p(x)$ in der baryzentrischen Darstellung auszuwerten?
- Wie hoch ist der Aufwand, wenn das Polynom wiederholt an verschiedenen Stellen ausgewertet wird, und bereits berechnete Werte zwischengespeichert werden dürfen?
- Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) mit der Interpolationsmethode nach Newton.

Aufgabe 4.2 (5 Punkte)

Die Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$ kann man auch rekursiv durch

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

definieren (in der Vorlesung war das eine Folgerung). Weisen Sie ohne Rückgriff auf das Resultat aus der Vorlesung für $x \in [-1, 1]$ und $k \in \mathbb{N}$ nach, dass $T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x))$ gilt.

Aufgabe 4.3 (5 Punkte)

Es seien x_j , $j = 0, 1, \dots, n$ die Tschebyscheff-Nullstellen im Intervall $[-1, 1]$. Weiter sei $p(x)$ ein Polynom mit $\prod_{i=0}^n (x - x_i) = x^{n+1} - p(x)$. Zeigen Sie, dass p die Funktion x^{n+1} in $[-1, 1]$ unter allen Polynomen mit dem maximalen Grad n bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ best approximiert.

(Aufgaben 4.4 und 4.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe 4.4 (7 Punkte)

Bestimmen Sie das Hermite-Interpolationspolynom zu den Vorgaben

x_j	-2	-1	0	1	2
$f(x_j)$	9	0	1	0	9
$f'(x_j)$		0	0	0	
$f''(x_j)$			-4		

indem Sie die erforderlichen Polynome ω_j^k , $j = 0, \dots, 4$, $k = 0, \dots, \mu_j$ mit $\mu_0 = \mu_4 = 0$, $\mu_1 = \mu_3 = 1$ und $\mu_2 = 2$ für $f^{(k)}(x_j) \neq 0$ bestimmen und die Lösung $p(x) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{\mu_j} f^{(k)}(x_j) \omega_j^k(x)$ in Normalform bringen.

Aufgabe 4.5 (7 Punkte)

Ermitteln Sie die Hermite-Interpolierende zu den Vorgaben

x_j	-2	-1	0	1	2
$f(x_j)$	9	0	1	0	9
$f'(x_j)$	-24	0	0	0	24

indem Sie die erforderlichen Polynome ω_j^k , $j = 0, \dots, 4$, $k = 0, 1$ für $f^{(k)}(x_j) \neq 0$ bestimmen und die Lösung $p(x) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{\mu_j} f^{(k)}(x_j) \omega_j^k(x)$ in Normalform bringen. Vergleichen Sie mit Aufgabe 4.4.