

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2014

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 5 - Abgabe bis Donnerstag, 12. Juni 2014, 12 Uhr im HG, Raum 4.49

Aufgabe 5.1 (6 Punkte)

- (a) Von einer Funktion $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ seien die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte an den Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_4$ bekannt (vgl. Aufgabe 2.2):

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	15	-1	1	15	83

Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_4x^4$ vom maximalen Grad 4 nach der Methode von Newton.

- (b) Von einer Funktion $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ seien die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte an den Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_4$ bekannt:

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	3
$f(x_i)$	11	1	1	5	121

Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_4x^4$ vom maximalen Grad 4 nach der Methode von Newton.

Aufgabe 5.2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Hermite-Interpolierende p als Polynom maximal 5. Grades, die an den Stützstellen $x_i = i$, $i = 0, 1, 2$ die in der Tabelle

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	6	4	20
$f'(x_i)$	—	2	39
$f''(x_i)$	—	14	—

angegebenen Funktions- und Ableitungswerte annimmt.

Aufgabe 5.3 (8 Punkte)

Warum ist die durch die Tabelle

x_i	0	1
$f(x_i)$	1	1
$f'(x_i)$	-1	—
$f''(x_i)$	—	8

gegebene Interpolationsaufgabe im Sinne der sonst in der Vorlesung betrachteten Aufgaben nicht korrekt gestellt? Finden Sie zwei verschiedene Polynome $p(x)$ und $q(x)$ vierten Grades, die alle Bedingungen der Tabelle erfüllen und für die außerdem $p'(x_1) = 2$ und $q'(x_1) = 3$ gilt. Gibt es ein kubisches Polynom, das die in der Tabelle angegebenen Forderungen erfüllt?

(Aufgaben 5.4 und 5.6 - siehe Seite 2)

Aufgabe 5.4 (5 Punkte)

- (a) Formulieren Sie zu $f \in C^m[a, b]$ die Hermite-Interpolationsaufgabe, deren Lösung das Taylor-Polynom n -ten Grades zu f um einen Entwicklungspunkt $x_0 \in (a, b)$ ist. Beweisen Sie den Zusammenhang mit Hilfe der verallgemeinerten dividierten Differenzen (für Hermite-Interpolation).
- (b) Geben Sie das Interpolationspolynom $p \in \mathbb{P}_3$ an, das an der Stützstelle $x_0 = 2$ den Funktionswert $y_0 = 1$ hat und dessen erste drei Ableitungen die Werte $y'_0 = 4$, $y''_0 = -8$ und $y'''_0 = 16$ annehmen. Geben Sie p in der Form $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ an.

Aufgabe 5.5 (5 Punkte)

Bestimmen Sie zur Funktion $f(x) := e^x$ das Hermite-Interpolationspolynom p zu den Vorgaben $(x_i, f(x_i))$, $(x_i, f'(x_i))$ zu den Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Nutzen Sie dazu die Newton-Darstellung mit einem Schema dividiertter Differenzen. Schätzen Sie im Intervall $I = [0, 1]$ den Fehler $|f(x) - p(x)|$ ab.

Aufgabe 5.6 (15 Punkte)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `hermiteInterpDQ.m`, die zu einer Hermite-Interpolationsaufgabe mit den Vorgaben

x_0	x_1	$\dots$	x_m
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_m)$
$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	$\dots$	$f'(x_n)$
$f''(x_0)$	$f''(x_1)$	$\dots$	$f''(x_n)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$f^{(\mu_0)}(x_1)$	$f^{(\mu_1)}(x_1)$	$\dots$	$f^{(\mu_m)}(x_m)$

die verallgemeinerten dividierten Differenzen für die Newton-Darstellung des Hermite-Interpolationspolynoms berechnet. Dabei sollen der Funktion die Stützstellen x_i und der zugehörige Ableitungsgrad μ_i für $i = 0, 1, \dots, m$ jeweils als Vektor übergeben werden, während die Funktionswerte $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)$ und Werte der Ableitungen $f', \dots, f^{(\mu_i)}$ in den Stützstellen als Matrix übergeben werden sollen. Die Funktion soll die benötigten Werte als Vektor für die weitere Berechnung zurückgeben.

- (a) Testen Sie Ihre Funktion an den Daten aus Aufgabe 5.2. Stellen Sie dazu die alle Interpolationsdaten, die Hermite-Interpolierende h und die zur Aufgabenstellung zugehörigen Ableitungen von h in einer gemeinsamen Grafik dar.
- (b) Die durch folgende Tabelle gegebene Hermite-Interpolationsaufgabe soll ebenfalls mit obiger Funktion gelöst werden:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_k	-1	-0.75	0	0.25	1	1.5	2.25	2.8	3
$f(x_k)$	-1.7392	-1.4319	1	0.7389	-0.493	-0.2674	0.0768	-0.0158	-0.0386
$f'(x_k)$	--	3.6042	0	-1.854	-0.3084	0.8433	-0.04485	-0.1588	-0.06634
$f''(x_k)$	--	12.8829	--	-4.4519	--	0.0969	--	0.394	0.4907
$f'''(x_k)$	--	--	--	--	--	-7.7996	--	1.1111	-0.09284

Die Daten stammen von der Funktion

$$f(x) = \frac{\cos(3x) + \cos(2x) \sin(x)}{e^x}$$

Stellen Sie die Funktion f , die Hermite-Interpolierende h bzw. f' und h' bzw. f'' und h'' bzw. f''' und h''' zusammen mit den zugehörigen Vorgaben in je einer Grafik gemeinsam dar. Was beobachten Sie dabei hinsichtlich der Approximationsfehler $\max_{x \in [-1, 3]} |f^{(i)}(x) - h^{(i)}(x)|$, $i = 0, 1, 2, 3$? Bestätigen Sie Ihre Beobachtungen durch näherungsweise Berechnung der Approximationsfehler. Ist Ihre Beobachtung der „Standardfall“ bei der Approximation einer Funktion durch eine Hermite-Interpolierende? Diskutieren Sie diese letzte Fragestellung und belegen Sie Ihre Antwort(en) durch (ein) geeignete(s) Beispiel(e).

Hinweise:

- Die (gerundeten) Daten aus (b) müssen nicht abgetippt werden. Die Daten können als Excel-Tabelle von der Internetseite zur Vorlesung heruntergeladen werden. Alternativ können Sie dort natürlich auch nur die Stützstellen und Ableitungsgrade herunterladen, und die Funktionswerte selbst berechnen.
- Zur Berechnung und Auswertung von f und h sowie den zugehörigen Ableitungen können Sie ausnahmsweise auch einmal die Symbolic-Toolbox verwenden.
- Die Matlab-Quelltexte, numerische Ergebnisse und Grafiken geben Sie bitte bis zum oben genannten Termin in **ausgedruckter** Form ab (wie üblich in der Vorlesung zum o.g. Termin). Ihren Ausdruck dürfen Sie gerne zusätzlich mit handschriftlichen Kommentaren ergänzen. Zusätzlich senden Sie die Quelltexte bitte bis zum o.g. Abgabetermin auch per E-Mail an `jens.kunath@tu-cottbus.de`.