Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2013

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 6 - Abgabe bis Dienstag, 01.07.2014

Aufgabe 6.1 (5 Punkte)

Diskutieren Sie die Lösbarkeit der rationalen Interpolationsaufgabe zu den Vorgaben

x_i	0	1	2	3
f_i	1	0	3	4

durch rationale Funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{ax^2+bx+c}{rx+t}$. Lösen Sie dazu das homogene lineare Gleichungssystem $p(x_i) - f_i \cdot q(x_i) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$. Gibt es unerreichbare Punkte?
(*Hinweis: Beachten Sie, dass Zähler- und Nennerfunktion nur bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt sind.*)

Aufgabe 6.2 (5 Punkte)

Diskutieren Sie die Lösbarkeit der rationalen Interpolationsaufgabe zu den Vorgaben

x_i	-2	-1	0	1	3
f_i	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	-4

durch rationale Funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{ax^2+bx+c}{rx^2+sx+t}$. Lösen Sie dazu das homogene lineare Gleichungssystem $p(x_i) - f_i \cdot q(x_i) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Gibt es unerreichbare Punkte?
(*Hinweis: Beachten Sie, dass Zähler- und Nennerfunktion nur bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt sind.*)

Aufgabe 6.3 (6 Punkte)

Für die Kotangensfunktion $f(x) = \cot\left(\frac{\pi}{180}x\right)$ im Gradmaß wurden folgende Werte aus einer Tafel entnommen:

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	57.28996163
1	2	28.63625328
2	3	19.08113669
3	4	14.30066626
4	5	11.43005230

Ermitteln Sie den Näherungswert für $f(2.5)$

(a) durch Polynominterpolation vom maximalen Grad 4 und

(b) durch rationale Interpolation mit höchstens quadratischen Zähler- und Nennerpolynomen.

Vergleichen Sie die Ergebnisse in beiden Fällen mit dem exakten Wert $f(2.5) = 22.9037655484\ldots$.

(Aufgabe 6.4 bis 6.6 - siehe Seite 2)

Aufgabe 6.4 (10 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(x+10)}{\sqrt{x^2+1}}$ soll im Intervall $[-5,5]$ durch

(a) Polynominterpolation und

(b) rationale Interpolation

mit $n+1$ äquidistanten Stützstellen $-5 =: x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n := 5$ für $n = 3, 5, 7, 10, 15$ interpoliert werden. Stellen Sie die Funktion f, die Interpolierenden sowie die Stützstellen/-werte für jedes $n = 3, 5, 7, 10, 15$ in je einer Grafik gemeinsam dar. Was fällt Ihnen bei der rationalen Interpolation für $n = 10$ auf? Welche Ursachen kann diese Beobachtung haben? Berechnen Sie außerdem für jedes $n = 3, 5, 7, 10, 15$ Näherungswerte für $f(0.5)$ und $f(2.5)$ mit jeweils beiden Interpolierenden, und vergleichen Sie die Ergebnisse in beiden Fällen mit dem exakten Werten $f(0.5) = 2.103133966\ldots$ bzw. $f(2.5) = 0.9380320695\ldots$.

Aufgabe 6.5 (15 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \le t \le n$ und $x \in [0,1]$ sind die Bernstein-Polynome $B_t^n(x)$ definiert durch

$$B_t^n(x) \;:=\; \binom{n}{t} x^t (1-x)^{n-t} \,.$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) Die Bernstein-Polynome sind symmetrisch, d.h. es gilt $B_t^n(x) = B_{n-t}^n(1-x)$ für alle $x \in [0,1]$.

(b) Die erste Ableitung von $B_t^n(x)$ ist

$$\big(B_t^n\big)'(x) \;=\; \begin{cases} -nB_t^{n-1}(x) & , \quad t = 0 \\ nB_{t-1}^{n-1}(x) - nB_t^{n-1}(x) & , \quad 1 \le t \le n-1 \\ nB_{n-1}^{n-1}(x) & , \quad t = n \end{cases}$$

(c) $B_t^n(x)$ hat in $[0,1]$ genau ein Maximum, nämlich in $x = \frac{t}{n}$

(d) $B_0^n(x), B_1^n(x), \ldots, B_n^n(x)$ sind linear unabhängig (und damit eine Basis von $\mathbb{P}_n$).

(e) Es gilt folgende Rekursionsformel: $B_t^n(x) = xB_{t-1}^{n-1}(x) + (1-x)B_t^{n-1}(x)$

Aufgabe 6.6 (11 Punkte)

Für die auf $[0,1]$ stetige reellwertige Funktion f ist die Folge ihrer Bernstein-Polynome $B_n f$ definiert durch

$$\big(B_n f\big)(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

(a) Berechnen Sie $B_n f$ für $f(x) = \sqrt{x}$ und $n = 1, 2, 3$. Wie groß sind die jeweiligen Approximationsfehler $\|f - B_n f\|_\infty$ im Intervall $[0,1]$?

(b) Sei $f(x) = x^3$. Zeigen Sie für $n \ge 3$, dass $B_n f \in \mathbb{P}_3$. Weisen Sie ohne Rückgriff auf den Satz von Weierstraß nach, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} \big|f(x) - (B_n f)(x)\big| \;=\; 0 \,.$$

(*Hinweis zu (a): Es genügt, die Fehler für $n = 2, 3$ näherungsweise zu berechnen, für $n = 1$ kann er leicht berechnet werden.*)

Hinweise zu den Aufgaben 6.3 und 6.4:

Zur rationalen Interpolation stellen wir eine Matlab-Funktion zur Verfügung, mit der die rationale Interpolierende zu beliebigen Vorgaben in beliebigen Punkten ausgewertet werden kann (sofern kein entarteter Fall vorliegt). Für die Polynominterpolation können Sie ein selbst geschriebenes Programm verwenden, z.B. aus früheren Programmieraufgaben.