

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2014

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 7 - Abgabe bis Dienstag, 15. Juli 2014

Aufgabe 7.1 (6 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Datenpaare (x_i, y_i) :

i	x_i	y_i
1	-2	0
2	0	1
3	1	3
4	2	5

- (a) Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade g zu den gegebenen Daten (x_i, y_i) .
- (b) Bestimmen Sie ein Polynom p höchstens zweiten Grades, das den Datensatz bezüglich der mittleren quadratischen Abweichung am besten approximiert.

Aufgabe 7.2 (5 Punkte)

Wir betrachten für $f, g \in C[-2, 2]$ das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-2}^2 f(x)g(x) dx$. Berechnen Sie die beste Approximation zu $f : C[-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^4 + x - 1$ aus $U = \text{span}(1, x, x^2)$.

Aufgabe 7.3 (5 Punkte)

Die Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & , \quad x \in [0, \pi] \\ \pi & , \quad x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ durch Berechnung der Fourierkoeffizienten formal eine beste Approximation p_n an f im Intervall $[0, 2\pi]$ bezüglich der Basis $\{1, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(nx), \cos(nx)\}$ in der L_2 -Norm.

Aufgabe 7.4 (5 Punkte)

Die Funktionen f und g seien auf $[-1, 1]$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ x & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = f(-x).$$

Zeigen Sie, dass

$$\|f\|_p = \|g\|_p = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{und} \quad \|f+g\|_p = \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

gilt, wobei $\|\cdot\|_p$ die p -Norm ist ($p < \infty$). Folgern Sie daraus, dass $p \geq 1$ eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für die Norm $\|\cdot\|_p$ ist.

(Aufgaben 7.5 bis 7.8 - siehe Seite 2f.)

Aufgabe 7.5 (7 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^2$ streng konvex ist.
- (b) Weisen Sie durch Angabe eines Beispiels nach, dass die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $C[0,1]$ nicht streng konvex ist.
- (c) Ist die L_1 -Norm $\|\cdot\|_1$ auf $C[0,1]$ streng konvex?

Aufgabe 7.6 (4 Punkte)

Skalieren Sie die Legendre-Polynome 1 , x , $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ und $\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ durch geeignete Faktoren, so dass sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{P}_3$ bilden. Legen Sie dabei die L_2 -Norm $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 (f(x))^2 dx}$ zugrunde. (Hinweis: Rechnen Sie diese Faktoren bzw. die Orthonormalbasis explizit aus.)

Aufgabe 7.7 (20 Punkte)

Bei der praktischen Berechnung der L_2 -Approximation von Funktionen aus $C[a,b]$ müssen die in den Normalgleichungen vorkommenden Integrale bzgl. des Skalarproduktes $\langle g, h \rangle = \int_a^b g(x)h(x) dx$ in der Regel numerisch berechnet werden. Dies kann je nach Länge des Intervalls $[a,b]$, der zu approximierenden Funktionen $f \in C[a,b]$ und der Basis $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ des Approximationsraumes $U = \text{span}(f_0, f_1, \dots, f_n)$ sehr aufwändig werden. Probleme gibt es u.a. auch bei der Lösung der Normalgleichungen, da die Matrizen schlecht konditioniert sein können.

Möchte man diesen Aufwand vermeiden, dann kann zum Beispiel auf die diskrete L_2 -Approximation zurückgegriffen werden, indem man nur $m \geq 2$ Punkte $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_m, f(x_m))$ in geeigneten $a \leq x_1 < \dots < x_m \leq b$ approximiert. Es stellt sich die Frage, ob die beiden Methoden gleich gute Approximationsergebnisse liefern?

Diskutieren Sie diese Fragestellung, indem Sie die Funktionen

$$f_1(x) = x^{25} - 3x^{20} + 5x^{15} - 10x^{10} + 15x^5 - 20x^3 + x + 5 \quad \text{und} \quad f_2(x) = \sin(2\pi x) \cdot (x^2 - 1)$$

im Intervall $[a,b] = [-1,1]$ in

- $U = \text{span}(1, x, x^2, \dots, x^n)$ bzw.
- $V = \text{span}(b_0, b_1, \dots, b_n)$ mit

$$b_0(x) := 1 \quad \text{und} \quad b_k := \begin{cases} \sqrt{x^{2k} + 1} & \text{für } k \in 3\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N} \\ \frac{1}{x^k + 1} & \text{für } k \in 2\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N} \\ x^k & \text{sonst} \end{cases}$$

jeweils für $n = 3, 5, 8, 10$

- bzgl. der L_2 -Norm im Intervall $[-1,1]$ best-approximieren (durch $s_n \in U$ bzw. $\tilde{s}_n \in V$) und
- gemäß dem kleinste Quadrateansatz die beste Approximation $d_n \in U$ (bzw. $\tilde{d}_n \in V$ an die $2n+1$ Punkte $(x_k, f(x_k))$ mit $x_k = -1 + \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, 2n$ bestimmen.

Schreiben Sie dazu eine Matlab-Funktion `euklidApproxKoeff_stetig.m`, die die Koeffizienten $a_i^{(n)}$ der besten Approximierenden

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} f_i(x)$$

berechnet. Für die diskrete L_2 -Approximation kann die in der Übung vom 20. Juni 2014 an der Tafel hergeleitete Funktion `euklidApproxKoeff.m` verwendet werden, die wir Ihnen fertig programmiert zur Verfügung stellen.

Stellen Sie die Funktionen f, s_n und d_n (analog $f, \tilde{s}_n$ und $\tilde{d}_n$) sowie die Punkte $(x_k, f(x_k))$, $i = 0, 1, \dots, n$ für jedes n in einer Grafik gemeinsam dar. Berechnen Sie außerdem näherungsweise die Fehler

$$\|f - s_n\|_2, \quad \|f - s_n\|_\infty, \quad \|f - d_n\|_2, \quad \|f - d_n\|_\infty, \quad \|f(X) - s_n(X)\|_2 \quad \text{und} \quad \|f(X) - d_n(X)\|_2$$

bzw.

$$\|f - \tilde{s}_n\|_2, \quad \|f - \tilde{s}_n\|_\infty, \quad \|f - \tilde{d}_n\|_2, \quad \|f - \tilde{d}_n\|_\infty, \quad \|f(X) - \tilde{s}_n(X)\|_2 \quad \text{und} \quad \|f(X) - \tilde{d}_n(X)\|_2$$

wobei $X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ und $h(X) = (h(x_0), h(x_1), \dots, h(x_n))$ für $h \in \{f, s_n, d_n, \tilde{s}_n, \tilde{d}_n\}$. Vergleichen und diskutieren Sie die Rechenergebnisse.

Approximieren Sie zusätzlich f_2 analog wie oben für $n = 20$ und $n = 50$. Was beobachten Sie dabei (z.B. im Matlab-Command-Window)? Welche Schlussfolgerungen können daraus allgemein gezogen werden?

Aufgabe 7.8 (15 Punkte)

Führen Sie die folgenden numerischen Tests zur Güte der Approximation von Funktionen durch trigonometrische Polynome und Bernsteinpolynome durch. Wir betrachten den Raum $L_2[-1, 1]$ aller auf $[-1, 1]$ quadratisch integrierbaren Funktionen f mit der durch

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 (f(x))^2 dx}$$

definierten L_2 -Norm. Ist die Funktion f darüber hinaus auf $[-1, 1]$ stetig, so betrachten wir auch die durch

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$$

definierte Maximumnorm.

Das Orthogonalsystem der auf $[-1, 1]$ erklärten trigonometrischen Polynome g_n , $n \in \mathbb{N}$ ist durch

$$g_1(x) := \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad g_{2k}(x) := \cos(k\pi x), \quad g_{2k+1}(x) := \sin(k\pi x) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

definiert. Zu jeder auf $[0, 1]$ erklärten Funktion f und jedem $n \in \mathbb{N}$ ist das zugehörige Bernsteinpolynom $B_n f$ durch

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

definiert. Zur Approximation einer auf $[-1, 1]$ definierten Funktion f sind geeignete lineare Transformationen zu berücksichtigen.

Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das die in (a), (b), (c) und (d) angegebenen Funktionen f durch trigonometrische Polynome $\tilde{t}_n$ aus $G := \text{span}(g_1, \dots, g_n)$ für $n = 5, 10, 15$ best-approximiert. Verwenden Sie zur Berechnung der Integrale eine Quadraturformel, die eine ausreichende Genauigkeit liefert. Berechnen Sie weiterhin zu den gleichen Funktionen f die Bernsteinpolynome $B_n f$ für $n = 5, 10, 15$.

Stellen Sie die Funktion f und die Approximierenden t_5, t_{10}, t_{15} und $B_5 f, B_{10} f, B_{15} f$ in einer gemeinsamen Grafik dar. Ermitteln Sie die Approximationsgüten sowohl in der L_2 -Norm als auch in der Maximumnorm. Verwenden Sie dazu Methoden, die eine ausreichende Genauigkeit liefern. Stellen Sie die Fehlerfunktionen für $t_5, t_{10}, t_{15}, \hat{f}_5, \hat{f}_{10}, \hat{f}_{15}$ und $B_5 f, B_{10} f, B_{15} f$ in einer gemeinsamen Grafik dar (analog zu (iii), (iv) und (v)), und ermitteln Sie näherungsweise deren Nullstellen. Kommentieren Sie Ihr Programm und die Ergebnisse.

Approximieren Sie die folgenden Funktionen:

$$(a) \quad f(x) = |\sin(\pi x)|, \quad x \in [-1, 1]$$

$$(b) \ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ \sin(\pi x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$(c) \ f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \text{für } -\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3} \\ 1-x & \text{für } \frac{1}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$(d) \ f(x) = \begin{cases} 1-x-x^2 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1+x-x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Hinweise:

- Die Lösung der Programmieraufgaben soll mit Matlab erfolgen. Verzichten Sie dabei auf die Verwendung der Symbolic-Toolbox!
- Zur Berechnung der trigonometrischen Polynome in Aufgabe 7.8 soll nicht das Programm aus Aufgabe 7.7 verwendet werden, sondern ein speziell auf diese Aufgabenstellung zugeschnittenes Programm.
- Die Matlab-Quelltexte, numerische Ergebnisse und Grafiken geben Sie bitte bis zum oben genannten Termin in **ausgedruckter** Form ab. Kommentieren Sie Ihren Ausdruck mit handschriftlichen Kommentaren. Zusätzlich senden Sie die Quelltexte bitte auch per E-Mail an `jens.kunath@tu-cottbus.de`.