

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2014

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 8 - Abgabe bis spätestens Mittwoch, 24. September 2014

Aufgabe 8.1 (8 Punkte)

Die Funktion $f(x) = e^x$ soll im Intervall $[-1, 1]$ durch ein Polynom $p(x)$ ersten Grades so approximiert werden, dass die Tschebyscheff-Norm

$$\|f - p\|_{\infty} = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|$$

minimal wird. Das Polynom $p(x)$ ist dadurch eindeutig bestimmt. Nach einem Satz aus der Vorlesung wird die maximale betragsmäßige Abweichung der Funktionen $f(x)$ und $p(x)$ im Intervall $[-1, 1]$ an genau drei Stellen x_0, x_1, x_2 angenommen, wobei $x_0 = -1$ und $x_2 = 1$ gilt, und das Vorzeichen der Abweichungen an den Stellen x_0, x_1, x_2 alterniert.

Berechnen Sie die Funktion $p(x)$, wobei Sie bei Ihren Rechnungen auf drei Stellen nach dem Komma runden. Bestimmen Sie x_1 aus und die Tschebyscheff-Norm $\|f - p\|_{\infty}$ auf jeweils drei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe 8.2 (5 Punkte)

Zeigen Sie für $n \leq 4$, dass $p(x) = 0$ die beste gleichmäßig (also bezüglich der Maximumsnorm) Approximierende aus $\mathbb{P}_n$ an die Funktion $f(x) = \sin(3x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ ist. Ist $p(x) = 0$ auch die beste gleichmäßig Approximierende aus $\mathbb{P}_5$ an $f(x)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8.3 (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\prod_{j=0}^n (x - x_j) \quad \text{für} \quad -1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

genau dann in $[-1, 1]$ betragsmäßig minimal wird, wenn $x_0, x_1, \dots, x_n$ die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_{n+1} sind. Dann gilt

$$\prod_{j=0}^n (x - x_j) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x).$$

Begründen Sie für $n \in \mathbb{N}$, dass

$$p_n(x) = x^{n+1} - \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$$

unter allen Polynomen höchstens n -ten Grades die Funktion x^{n+1} im Intervall $[-1, 1]$ bezüglich der Maximumsnorm best approximiert. Leiten Sie die Polynome p_n für $n = 1, 2, 3, 4$ mit der Rekursionsformel für die Tschebyscheff-Polynome her.

(Aufgaben 8.4 bis 8.12 - siehe Seiten 2 bis 4)

Aufgabe 8.4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ das lineare Polynom $p_1(x)$, das $f(x)$ im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ bezüglich der Maximumnorm best approximiert, und geben Sie die Approximationsgüte $\|f - p_1\|_\infty$ an. Runden Sie bei Ihren Rechnungen auf drei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe 8.5 (5 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ um $x = 0$ in das Taylorpolynom $t_5(x)$ fünften Grades, und ersetzen Sie darin x^5 und x^4 durch ihre jeweils in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ best approximierenden Polynome höchstens vierten bzw. dritten Grades bezüglich der Maximumsnorm. Verwenden Sie Aufgabe 8.3 und beachten Sie dabei die unterschiedlichen Intervalle.

Aufgabe 8.6 (8 Punkte)

Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ und $X = \{-0.5, -0.3, -0.1, 0.1, 0.3, 0.5\}$ die beste diskrete Tschebyscheff-Approximation aus $\mathbb{P}_3$ durch das Remes-Verfahren, und geben Sie die Approximationsgüte auf X an. Rechnen Sie mit achstelliger Dezimalarithmetik.

Aufgabe 8.7 (25 Punkte)

Programmieren Sie mit Matlab den Remes-Algorithmus zur Bestimmung bester Approximationen $p \in \mathbb{P}_n$ bezüglich der Maximumsnorm. Verwenden Sie als Eingabe

- das Intervall $I = [a, b]$,
- die dort stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,
- eine endliche Menge $X \subset [a, b]$ bestehend aus mindestens $n + 2$ Punkten oder $X = [a, b]$ sowie
- eine Startreferenz $X^{(0)} \subset X$ bestehend aus genau $n + 2$ Punkten.

Ihr Programm sollte in jedem Schritt die aktuelle Referenz $X^{(i)}$, die Koeffizienten $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}$ der aktuellen Approximierenden

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^n a_j^{(i)} x^j,$$

deren Güte ϱ_i auf $X^{(i)}$ und den Fehler $\|f - p_i\|_{\infty, [a, b]}$ ausgeben. Als Abbruchkriterium soll $|\varrho_i - \varrho_{i-1}| < \varepsilon$ mit einem geeigneten $\varepsilon > 0$ verwendet werden. Erstellen Sie für jeden Iterationsschritt eine Grafik, in der die Fehlerfunktion $f - p_i$, die Referenzen $X^{(i)}$ und für $i > 0$ auch $f - p_{i-1}$ und $X^{(i-1)}$ dargestellt werden, sowie eine Grafik, die f und die beste Approximation zeigt.

Wenden Sie Ihr Programm auf die folgenden Approximationsaufgaben an:

- $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \ln(1+x)$,
 $X = \{-0.5, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.3, 0.4, 0.5\}$, $X^{(0)} = \{-0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1\}$.
- $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \ln(1+x)$, $X = \{-0.5, -0.4, \dots, 0.4, 0.5\}$, $X^{(0)} = \{-0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1\}$.
- $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \ln(1+x)$, $X = I$, $X^{(0)} = \{-0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1\}$. Vergleichen Sie die Approximationsgüte mit den in den diskreten Approximationen (a) und (b) erreichten Güten.
- $I = [0, 2\pi]$, $f(x) = \sin(3x)$, $X = I$, $X^{(0)} = \{0, \frac{\pi^2}{96}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$. Vergleichen Sie mit Aufgabe 8.2. Warum erhält man dieses (exakte) Ergebnis mit der Matlab-Rechnung nicht? Kann man das Berechnungsergebnis beeinflussen?
- $I = [0, 2\pi]$, $f(x) = \sin(3x)$, $X = I$, $X^{(0)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vergleichen Sie mit Aufgabe 8.2.

(f) $I = [-3, 2]$, $X = I$, $X^{(0)} = \{-2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5\}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} & , \quad x < 0 \\ |\sin(2\pi x)| \cdot \exp(x) - x^2 + 2 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \exp(x-1) \cdot (x-2)^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

Entspricht die Fehlerfunktion $f - \hat{p}$ der berechneten besten Approximation $\hat{p}$ der üblicherweise in Lehrbüchern abgedruckten „Prototypen“ bei der Tschebyscheff-Approximation? Prüfen Sie, ob $f - \hat{p}$ die Alternations-eigenschaft erfüllt.

(g) $I = [-3, 2]$, $X = I$, $f(x)$ wie in (e) und

$$X^{(0)} = \{-3, -2.75, -2.5, -2.25, -2, -1.75, -1.5, -1.25, -1, -0.75, -0.5, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2\}$$

Hinweise:

- Verzichten Sie auf die Verwendung der *Symbolic Toolbox*!
- Die Koeffizienten $a_j^{(i)}$, die Referenzen $X^{(i)}$ sowie die Fehler ϱ_i und $\|f - p_i\|_{\infty, [a, b]}$ können z.B. übersichtlich als Tabelle zusammengefaßt werden. Ein Ausdruck ist nicht erforderlich, es genügt die Ausgabe im Matlab-Kommando-Fenster mittels der Funktion `disp.m`, `num2str.m` und `figure.m`. Auch die Grafiken müssen nicht ausgedruckt werden. Um nicht zu viele Grafiken geöffnet zu haben, kann man es z.B. beim Ablaufen eines Matlab-Skripts durch kurze Unterbrechnungen mittels des Befehls `pause` dem Nutzer selbst überlassen, die Rechnungen weiterlaufen zu lassen und ggf. nicht mehr erforderliche Grafiken zu schließen.
- Beantworten Sie auch die unter (c), (d), (e) und (f) zusätzlich gestellten Fragen.

Aufgabe 8.8 (8 Punkte)

Gegeben sei ein reellwertiges Intervall $[a, b]$ und daraus $2n + 3$ Punkte $a =: z_{-1} < x_0 < z_0 < x_1 < z_1 < \dots < z_{n-1} < x_n < z_n := b$. Die Werte $y_0, y_1, \dots, y_n$ seien an den Stellen $x_0, x_1, \dots, x_n$ durch einen Polygonzug mit den Knoten $z_{-1}, z_0, z_1, \dots, z_n$ zu interpolieren. Untersuchen Sie dieses Problem für den Fall, dass die Splineknoten $z_{-1}, z_0, \dots, z_n$ mittig zwischen den Interpolationspunkten $x_0, x_1, \dots, x_n$ liegen. Diskutieren Sie Lösbarkeit und Darstellung dieser Splineaufgaben.

(Hinweis: Gehen Sie von der Darstellung $s_k(x) = A_k + B_k(x - x_k)$ für $x \in [z_{k-1}, z_k)$ aus.)

Aufgabe 8.9 (15 Punkte)

(a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `polygonzugMittig.m`, die das Interpolationsproblem aus Aufgabe 8.8 löst und den entsprechenden Polygonzug in $x \in \mathbb{R}$ auswertet.

(b) Interpolieren Sie die Funktionen

(i) $f(x) = \sin(2\pi x)$ im Intervall $[a, b] = [-1, 1]$ sowie

(ii) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ im Intervall $[a, b] = [-5, 5]$

jeweils für $n = 5, 10, 15, 20$ durch Polygonzüge

- $p_n \in S^1(x_0, \dots, x_n)$ bzw.
- $q_n \in S^1(z_{-1}, z_0, \dots, z_n)$,

wobei $x_j = a + k \frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$ gewählt wird und die Splineknoten z_k von q_n gemäß Aufgabe 8.8 gewählt werden. Zur Berechnung und Auswertung von q_n soll die Funktion `polygonzugMittig.m` aus Aufgabenteil (a) verwendet werden, zur Berechnung und Auswertung von p_n kann die Matlab-Funktion `interp1.m` verwendet werden. Stellen Sie die Funktion f sowie die Interpolierenden Splines p_n und q_n in jeweils einer Grafik gemeinsam dar. Experimentieren Sie dabei bzgl. möglicher Freiheitsgrade für q_n .

- (c) Welche der in (b) verwendeten Interpolationsmethoden liefert die besseren Ergebnisse? Welche der beiden Methoden konvergiert schneller gegen f ? Diskutieren Sie diese Fragen kritisch durch die Verwendung geeigneter Hilfsmittel und Rechnungen?

Aufgabe 8.10 (6 Punkte)

Betrachten Sie die quadratischen Spline-Interpolierenden $s_a(x)$ und $s_b(x)$ für die Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ im Intervall $[-1, 1]$ mit den $n + 1 = 5$ Interpolationsstellen $x_0 = -1, x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{3}$ und $x_4 = 1$ für die folgenden Nebenbedingungen

(a) $s'_a(x_0) = f'(x_0)$ und

(b) $s'_b(x_0) = 0$,

wobei die Knoten mit den Interpolationsstellen identisch sind. Liegen die Interpolierenden $s_a(x)$ und $s_b(x)$ ebenso wie die Funktion $f(x)$ symmetrisch zur y -Achse?

Hinweis: Es wird nicht verlangt, die Interpolierenden auf dem ganzen Intervall $[-1, 1]$ explizit zu bestimmen.

Aufgabe 8.11 (5 Punkte)

Finden Sie eine quadratische Spline-Interpolierende $s(x)$ für die Vorgaben

k	0	1	2	3	4
x_k	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y_k	1	0	-1	0	1

mit den Knoten $x_0, \dots, x_4$, so dass $y = s(x)$ symmetrisch zur y -Achse liegt. Durch welche Zusatzbedingung ist diese Spline-Interpolierende eindeutig bestimmt?

Aufgabe 8.12 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Werte der Parameter $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$s(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3 & , \text{ für } x \in (-\infty, 1) \\ c(x-2)^2 & , \text{ für } x \in [1, 3) \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3 & , \text{ für } x \in [3, \infty) \end{cases}$$

ein kubischer Spline ist, der außerdem die folgenden Daten interpoliert:

x_i	0	1	4
y_i	26	7	25