

Behauptung:

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ungerade, und die nichtkonstante Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei entweder gerade oder ungerade. Weiter sei p_n das Interpolationspolynom zu den symmetrischen Stützpunkten

$$(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n) \quad (*)$$

mit $x_i \neq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ und q_n das Interpolationspolynom zu den symmetrischen Stützpunkten

$$(x_0, f_0), \dots, (x_{\frac{n+1}{2}-1}, f_{\frac{n+1}{2}-1}), (0, f(0)), (x_{\frac{n+1}{2}}, f_{\frac{n+1}{2}}), \dots, (x_n, f_n) \quad (\#)$$

Dabei gilt

- (i) $x_0 < x_1 < x_{\frac{n+1}{2}-1} < 0 < x_{\frac{n+1}{2}} < \dots < x_n$
- (ii) $-x_i = x_{n-i}$ für $i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$
- (iii) $f_i = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$

Mit $L_0, L_1, \dots, L_n$ seien die Lagrange-Basispolynome zu $(*)$, mit $\hat{L}_0, \hat{L}_1, \dots, \hat{L}_{n+1}$ die Lagrange-Basispolynome zu $(\#)$ bezeichnet. Es gilt:

- (a) $\frac{x}{x_i} L_i(x) = \hat{L}_i$ für $i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ und $\frac{x}{x_i} L_i(x) = \hat{L}_{i+1}(x)$ für $i = \frac{n-1}{2} + 1, \dots, n$
- (b) $L_i(-x) = L_{n-i}(x)$ für $i = 0, 1, \dots, n$
- (c) Falls die Interpolationsdaten punktsymmetrisch sind, d.h. es gilt $f_i = -f_{n-i}$ für $i = 0, 1, \dots, n$, dann ist auch p_n punktsymmetrisch (ungerade).
- (d) Falls die Interpolationsdaten achsensymmetrisch sind, d.h. es gilt $f_i = f_{n-i}$ für $i = 0, 1, \dots, n$, dann sind auch p_n und q_n achsensymmetrisch (gerade).
- (e) Ist f ungerade, so gilt $p_n(x) = q_n(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$.
- (f) Es gelte $f(0) = 0$. Für $x \neq 0$ interpoliert $\tilde{p}_n(x) := \frac{q_n(x)}{x}$ die Daten $\left(x_0, \frac{f_0}{x_0}\right), \dots, \left(x_n, \frac{f_n}{x_n}\right)$. Falls die Daten (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ punktsymmetrisch sind, so ist $\tilde{p}_n$ gerade. Sind (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ achsensymmetrisch, so ist $\tilde{p}_n$ ungerade.

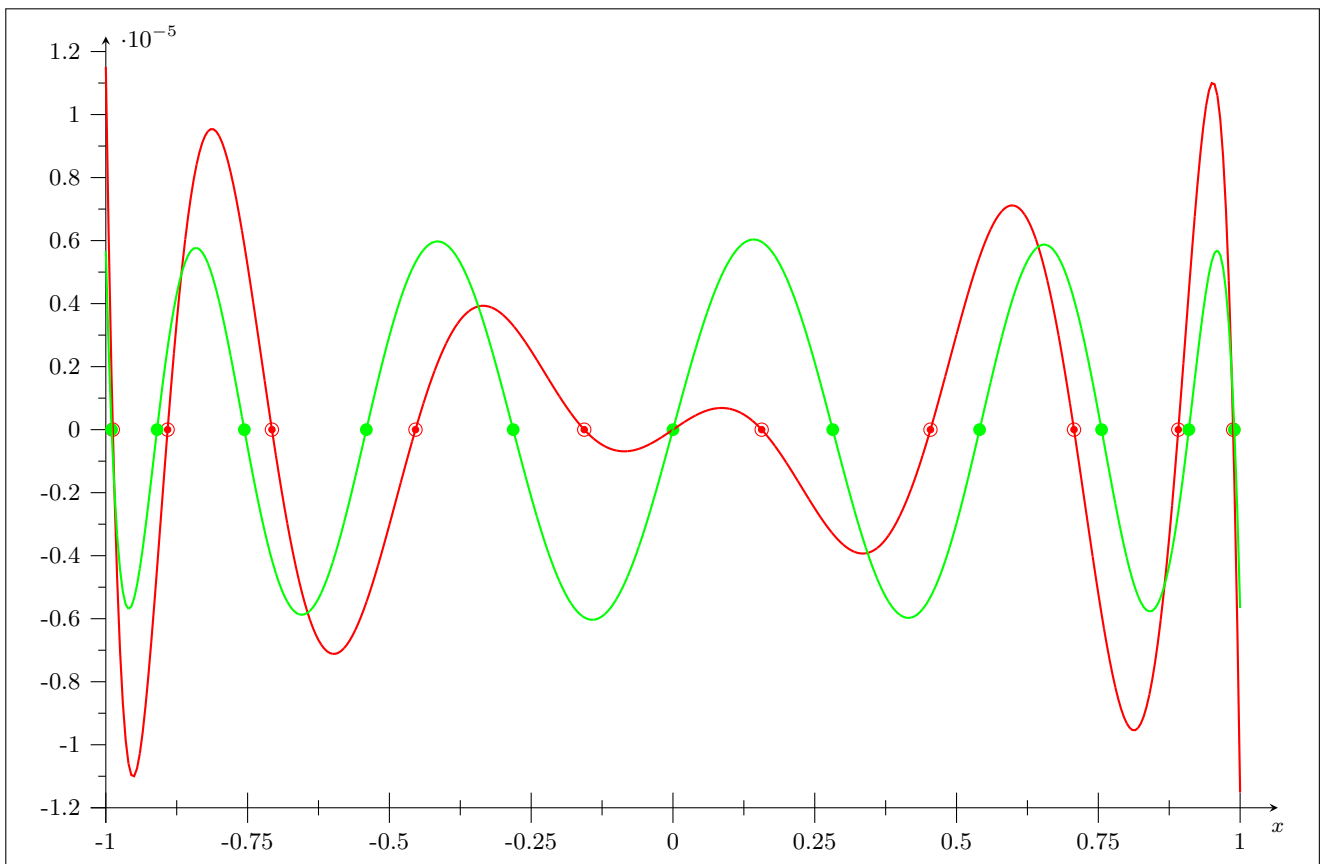


Abb. 1: Interpolation von $f(x) = \sin(\pi x)$ im Intervall $[-1, 1]$ durch Interpolationspolynome $p_n \in \mathbb{P}_n$ in $n + 1$ Tschebyscheff-Stützstellen, $\bullet$ für $n = 9$, $\bullet$ für $n = 10$: Dargestellt sind die Fehlerfunktionen $f - p_n$, — für $n = 9$, — für $n = 10$.

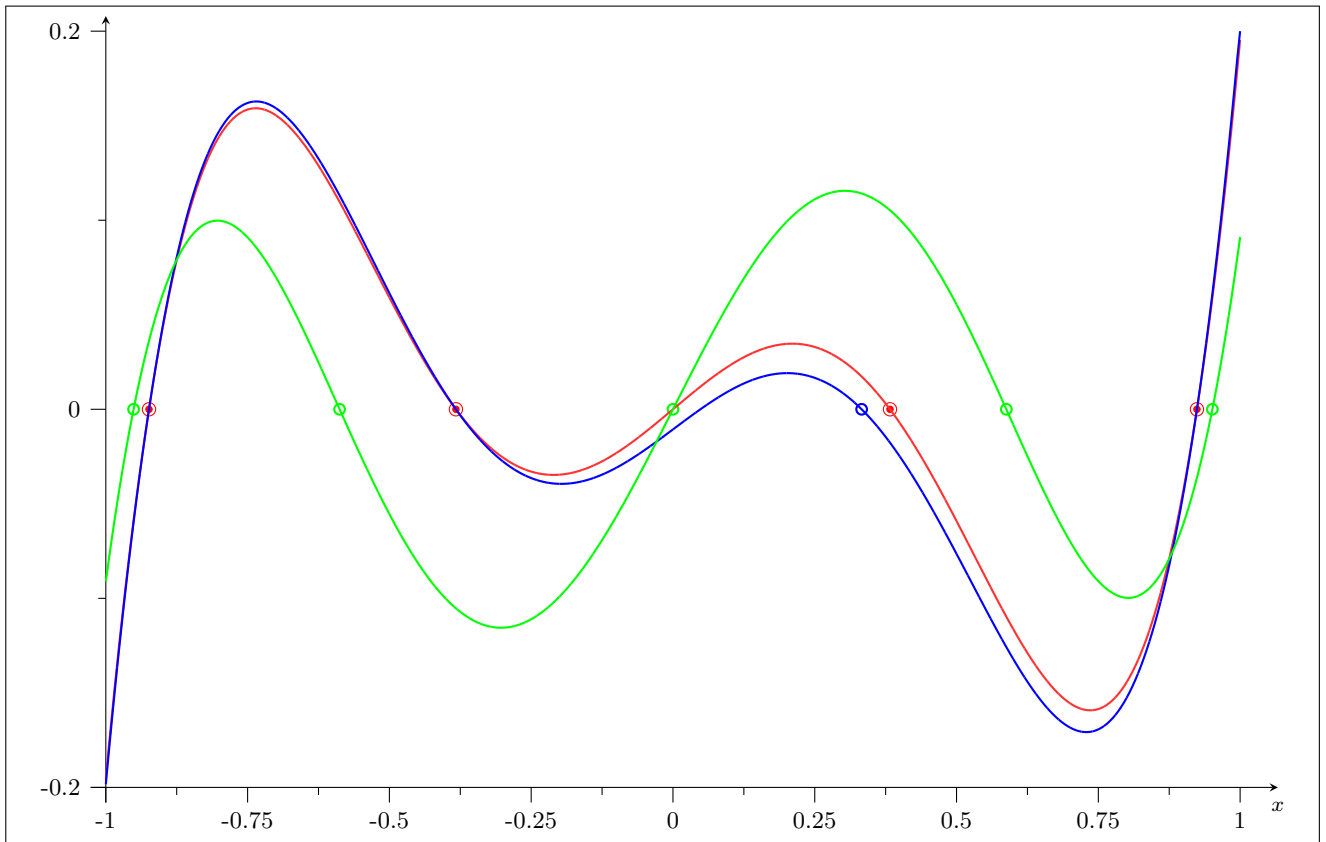


Abb. 2: Interpolation von $f(x) = \sin(\pi x)$ im Intervall $[-1, 1]$ durch Interpolationspolynome $p_n \in \mathbb{P}_n$ in $n + 1$ Tschebyscheff-Stützstellen, $\bullet$ für $n = 3$, $\bullet$ für $n = 4$: Dargestellt sind die Fehlerfunktionen $f - p_n$, — für $n = 3$, — für $n = 4$. Die Punktsymmetrie der Interpolationsdaten wird durch p_n reproduziert, d.h. p_n ist in diesem Fall ungerade. Wird z.B. für $n = 3$ die dritte Tschebyscheff-Stützstellen x_2 ersetzt durch $x_2 - 0.05$ $\bullet$, d.h. die Interpolationsdaten sind nicht mehr punktsymmetrisch, dann ist auch das zugehörige Interpolationspolynom — nicht mehr symmetrisch.