

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Wiederholungsübungen zur Prüfungsvorbereitung

Teil 1: Zahlen ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) und beschränkte Mengen

Aufgabe 1.1

Beweisen Sie folgenden Aussagen durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

(c) $n^2 > 2n + 1$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

(d) $a_n := 5^{2n} - 3^{2n}$ ist durch 8 teilbar.

(e) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n!}$ für $n \geq 2$.

(f) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Aufgabe 1.2

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen im Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ unter alleiniger Verwendung der Körperaxiome:

(a) $(-1) \cdot (-1) = 1$

(b) $(-a) \cdot (-a) = a^2$

(c) Es gibt kein multiplikatives Inverses von 0.

Aufgabe 1.3

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen unter alleiniger Verwendung der Anordnungsaxiome für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(a) $a < b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

(b) $a < b \Rightarrow -b < -a$

Aufgabe 1.4

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum im Körper $\mathbb{R}$ und geben Sie diese Werte an, falls sie existieren:

(a) $A_n = \{x \in \mathbb{Q} \mid 8 \leq x^n \leq 64\}$ für $n = 2, 3, 6, 7$

(b) $B = \left\{ 1 - \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ und } x^2 + 2x + 2 > 5\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \leq |x + 2|\}$

(e) $E = A_6 \cap \mathbb{Z}$

(f) $F = \left\{ \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1 + (-1)^n}{2(n + 1)} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

(g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 2) \cdot |x - 2| \leq 8\}$

(h) $H = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x - 3}{x + 1} > \frac{x + 2}{x - 1} \right\}$

Diskutieren Sie für die Mengen A_n , $n = 2, 3, 6, 7$ aus Aufgabenteil (a) zusätzlich die Existenz von Infimum und Supremum im Körper $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 1.5

(a) Skizzieren Sie die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}((1 - i)z) = 0\}$ in der komplexen Zahlenebene.

(b) Stellen Sie die komplexen Zahlen $v = \frac{5 + 5i}{1 + 2i} - \frac{5 - 5i}{1 - 2i}$ und $w = \frac{8 - 2i}{4 - i}$ in der Form $a + bi$ dar.

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die die Gleichung $\frac{1}{2}z^6 = -3z^5 - \frac{13}{|\sqrt{3} + i|}z^4$ erfüllt ist und stellen Sie diese in der Form $z = a + bi$ dar. Hat die Lösungsmenge ein Infimum, Supremum, Minimum oder Maximum? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{Z}$, die die Gleichung $z^5 = 32$ erfüllen. Welchen Betrag haben alle Lösungen?