Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Wiederholungsübungen zur Prüfungsvorbereitung

Teil 2: Folgen und Reihen

Aufgabe 2.1

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den nachfolgend angegebenen Gliedern auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \dfrac{a_n}{a_n + 2}$ für $n \geq 0$

(b) $a_0 := a \in \mathbb{R}, a_1 := b \in \mathbb{R}$ und $a_n := \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + a_{n-2}\right)$ für $n \geq 2$.

(c) $a_n := \dfrac{2n(n+1)(n-1)}{n^3+1}, n \geq 0$

(d) $a_n = \sqrt{2n+\sqrt{n}} - \sqrt{2n-\sqrt{n}}, n \geq 0.$

(e) $a_n := \dfrac{3^n - 2n}{4^n + 1}$

(f) $a_n := \dfrac{(n^2-3)^2}{2n^4+7n-12} \cdot \left(\dfrac{4-2n^2}{7n+5n^2} - \dfrac{3n^3+2n^2}{5n^3-1}\right)$

(g) $a_n := \dfrac{8^{n-5}+5}{5^n-2}$

(h) $a_n := \dfrac{\cos(n) + \sin(n+2)}{n+1}$

Aufgabe 2.2

Nach Definition aus der Vorlesung heißt a Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert. In der Literatur wird auch der Begriff des Häufungswertes verwendet. Ermitteln Sie die Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) $a_n := \dfrac{3n^2}{5n^2+2n} + (-1)^n \cdot \dfrac{3n^2+5n}{2n^2+3} \cdot \dfrac{7n^3+n}{10n^3+8n^2+(-1)^n}$

(b) $a_n := (-1)^n \left(n - 3\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor\right) \cdot \dfrac{5n^7-1}{1-8n^7}$

(c) $a_n := \sin\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)$

Aufgabe 2.3

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$-Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-7}{4n^2+1} = \dfrac{1}{4}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ für $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Aufgabe 2.4

Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{5^n}$

(b) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}$

Aufgabe 2.5

Untersuchen Sie die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+n^3}{4-n+n^2-3n^3}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+3(-1)^n)^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n} - \sqrt{n}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2}{n-1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n+1}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot e^{-n^2}$