

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2013/2014

Wiederholungsübungen zur Prüfungsvorbereitung

Teil 3: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Aufgabe 3.1

Sind die nachfolgenden, stückweise definierten Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig? Beantworten Sie diese Frage, indem Sie die links- und rechtsseitigen Grenzwerte in den Nahtstellen berechnen.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) & , \quad x \neq 2 \\ 0 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} & , \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{20}} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} |x| + 1 & , \quad x < 0 \\ (x+1)^2 & , \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 19 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

Aufgabe 3.2

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := |x| + 3x^2 - 7$. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und berechnen Sie die Funktionswerte $f(0)$ und $f(3)$. Gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = -3$ oder $f(x) = 5$? Stellen Sie einen Zusammenhang mit dem Zwischenwertsatz her.

Aufgabe 3.3

Weisen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten nach, dass $f'(x) = 4x + 3$ die Ableitung des Polynoms $f(x) := 2x^2 + 3x - 9$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3.4

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass f für jedes $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung von f .

Hinweis: Diskutieren Sie die Differenzierbarkeit der Funktion f für $x \neq 0$ durch Differentiationsregeln und für $x = 0$ mit Hilfe des Differenzenquotienten.

- (b) Ist f stetig auf $\mathbb{R}$?

- (c) Ist f' stetig auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 3.5

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} e^x - 1 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \ln\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ definiert.

- (a) Untersuchen Sie die Funktion f an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ auf Stetigkeit.
- (b) Ist die Funktion an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

Aufgabe 3.6

Untersuchen Sie, für welche $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ die folgenden stetigen Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ einmal *stetig differenzierbar* sind. Geben Sie für diese $x \in D$ die erste Ableitung von f an.

- (a) $f(x) := x \cdot \exp(\sin(x))$, $D = \mathbb{R}$
- (b) $f(x) := \frac{4x-4}{x^2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (c) $f(x) := \ln(8x^4 + 3x^2 + 1)$, $D = \mathbb{R}$
- (d) $f(x) := |x + 1|$, $D = \mathbb{R}$