

Duales Simplex-Verfahren

- **Definition:** Zu einem Minimierungsproblem

$$(\mathbf{P}) \quad \min f(x) \quad \text{bzgl.} \quad x \in G \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt das Maximierungsproblem

$$(\mathbf{D}) \quad \max g(y) \quad \text{bzgl.} \quad y \in G_D \subseteq \mathbb{R}^m$$

dual, falls die Dualitätsbeziehung

$$f(x) \geq g(y)$$

für alle $x \in G$, $y \in G_D$ gilt.

- Duales Problem zum LOP in 1. Normalform:

$$(\mathbf{P}_1) \quad \min c^T x \quad \text{bzgl.} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$(\mathbf{D}_1) \quad \max b^T y \quad \text{bzgl.} \quad A^T y \leq c, \quad y \leq 0, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

- Duales Problem zum LOP in 2. Normalform:

$$(\mathbf{P}_2) \quad \min c^T x \quad \text{bzgl.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$(\mathbf{D}_2) \quad \max b^T y \quad \text{bzgl.} \quad A^T y \leq c, \quad y \text{ frei}, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

- $(\mathbf{P}_1)$ bzw. $(\mathbf{P}_2)$ heißen primales Problem

$(\mathbf{D}_1)$ bzw. $(\mathbf{D}_2)$ heißen duales Problem (zu $(\mathbf{P}_1)$ bzw. $(\mathbf{P}_2)$)

- Das duale Problem liefert Schranken für den Optimalwert des primalen Problems (und umgekehrt), d.h. sind $\bar{x} \in G$ und $\bar{y} \in G_D$, so gilt:

$$\begin{aligned} \circ \quad c^T \bar{x} &\geq \min_{x \in G} c^T x \geq b^T \bar{y} \\ \circ \quad b^T \bar{y} &\leq \max_{y \in G_D} b^T y \leq c^T \bar{x} \end{aligned}$$

- **Alternativsatz:** **(P)** und **(D)** seien zueinander duale lineare Probleme, und für die zulässigen Bereiche G bzw. G_D gelte $G \cup G_D \neq \emptyset$. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen

1. **(P)** und **(D)** sind beide lösbar (mit gleichem Optimalwert).
2. **(P)** ist unzulässig und **(D)** ist unbeschränkt.
3. **(D)** ist unzulässig und **(P)** ist unbeschränkt.

- Duales Simplex-Verfahren:

	x_B^T	x_N^T	
x_B	E	D	p
$-z$	0^T	h^T	$-z_0$

- Voraussetzungen: $h \geq 0$, p beliebig
- Basislösung $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ ist i.A. primal unzulässig.
- Funktionswertanalyse / Austauschschritt

$$(1) \quad p \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist optimal}$$

- (2) Es gibt ein $l \in \{1, \dots, m\}$ mit $p_l < 0$ und für alle $j \in \{1, \dots, n-m\}$ gilt $d_{lj} \geq 0 \Rightarrow$ Das Optimierungsproblem besitzt keine Lösung.

(3) Es gibt ein $l \in \{1, \dots, m\}$ mit $p_l < 0$ und mindestens einen Index

$j \in \{1, \dots, n - m\}$ mit $d_{lj} < 0$. Dann bestimme den Index k mit

$$\frac{h_k}{-d_{lk}} = \min \left\{ \frac{h_j}{-d_{lj}} \mid d_{lj} < 0, j \in \{1, \dots, n - m\} \right\}$$

Austauschschritt: x_k wird Basisvariable, x_l wird Nichtbasisvariable

Durchführung: Gauß-Jordan-Verfahren mit d_{lk} als Pivotelement

○ Hinweise:

- * die Zwischenschritte liefern primal unzulässige Basislösungen
- * mit Erreichen der Zulässigkeit ist auch der Optimalwert erreicht
- * Zielfunktionswerte wachsen monoton, da das Verfahren gleichzeitig die Optimallösung für das duale Problem ermittelt

○ Anwendungsfälle:

- * LOP in 1. Normalform, Zielfunktionskoeffizienten nichtnegativ
- * optimales Tableau gefunden, nachträgliches Einfügen einer Nebenbedingung
- * ...