

Lösung linearer Gleichungssysteme

- gegeben: System aus m linearen Gleichungen mit n Variablen $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

- abkürzende Schreibweise: $A \cdot x = b$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)^T$
- Lösungsstrategie: Gauß-Algorithmus - Erzeugung äquivalenter Systeme (d.h. Systeme mit gleicher Lösungsmenge).

Folgende elementare Umformungen ändern die Lösungsmenge nicht:

- Vertauschen zweier Gleichungen (Zeilen)
- Addition des λ -fachen der Gleichung k zur Gleichung i
- Multiplikation einer Gleichung mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$
- Vertauschen zweier Spalten (Variablen ändern Reihenfolge!!!)

- Ziel: Überführung von $(A|b)$ in eine Matrix $(C|d)$ in Zeilenstufenform:

$$(C|d) = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \dots & 0 & c_{1r_1} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2r_2} & \dots & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{k,r_k} & \dots & c_{kn} & d_k \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & d_{k+1} \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & d_m \end{array} \right)$$

- Lösbarkeitskriterium: Es gilt

$$\mathcal{L}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \neq \emptyset$$

genau dann, wenn

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) \quad \Leftrightarrow \quad \text{rg}(C) = \text{rg}(C|d)$$

- Spezialfall 1: $\text{rg}(C) = \text{rg}(C|d) = k = m = n$

$$(C|d) = \left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & \dots & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{nn} & d_n \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ Lösung durch „Rückwärtseinsetzen“: $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$ und

$$x_j = \frac{1}{c_{jj}} \cdot \left(d_j - \sum_{i=j+1}^n c_{ji}x_i \right), \quad j = n-1, n-2, \dots, 1$$

- Spezialfall 2: $\text{rg}(C) = \text{rg}(C|d) = k = m = n$ mit

$$(C|d) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & d_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & d_n \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x = d$$

- Spezialfall 3: $\text{rg}(C) = \text{rg}(C|d) = m < n$ mit

$$(C|d) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} c_{11} & \dots & \dots & c_{1m} & c_{1,m+1} & \dots & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2m} & c_{2,m+1} & \dots & c_{2,n} & d_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{mm} & c_{m,m+1} & \dots & c_{m,n} & d_m \end{array} \right)$$

$\Rightarrow x_{m+1}, \dots, x_n$ sind freie Variablen, d.h. beliebig wählbar:

$$x_{m+1} := \lambda_1 \quad , \quad x_{m+2} := \lambda_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n := \lambda_{n-m}$$

$\Rightarrow$ Berechnung der $x_1, \dots, x_m$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$x_m = \frac{1}{c_{mm}} \cdot \left(d_m - \sum_{i=1}^{n-m} c_{i,m+i} \lambda_i \right)$$

und

$$x_j = \frac{1}{c_{jj}} \cdot \left(d_j - \sum_{i=j+1}^m c_{ji} x_i - \sum_{i=1}^{n-m} c_{i,m+i} \lambda_i \right)$$

für $j = m-1, m-2, \dots, 1$

- Spezialfall 4: $\text{rg}(C) = \text{rg}(C|d) = m < n$ mit

$$(C|d) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= E \in \mathbb{R}^{m \times m}} \left| \underbrace{\begin{pmatrix} c_{1,m+1} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,m+1} & \dots & c_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,m+1} & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix}}_{=: R \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} \right| \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \right)$$

$$x^T = \left(\underbrace{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m}_{=: x_B^T \in \mathbb{R}^m} \left| \underbrace{x_{m+1} \ \dots \ x_n}_{=: x_N^T \in \mathbb{R}^{n-m}} \right. \right)$$

$$\Rightarrow C \cdot x = (E|R) \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = E \cdot x_B + R \cdot x_N = x_B + R \cdot x_N = d$$

$$\Rightarrow x_B = d - R \cdot x_N \quad \text{mit} \quad x_N^T = (x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m} \text{ beliebig}$$

- Spezialfälle 1 und 3 $\rightarrow$ Gauß-Algorithmus
- Spezialfälle 2 und 4 $\rightarrow$ Gauß-Jordan-Algorithmus

- Beispiel 1:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 6x_1 + 11x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Gauß-Algorithmus

	A			b	Operationen
I	2	1	0	1	
II	-4	2	1	2	II + 2 · I
III	6	11	3	3	III - 3 · I
I'	2	1	0	1	
II'	0	4	1	4	
III'	0	8	3	0	III' - 2 · II'
I''	2	1	0	1	
II''	0	4	1	4	
III''	0	0	1	-8	
	C			d	

$$\Rightarrow x_3 = -8$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}(4 - 1 \cdot x_3) = 3$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(1 - 1 \cdot x_2 - 0 \cdot x_3) = -1$$

Gauß-Jordan-Algorithmus

	A			b	Operationen
I	2	1	0	1	$\frac{1}{2}I$
II	-4	2	1	2	
III	6	11	3	3	
I'	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
II'	-4	2	1	2	II' + 4 · I'
III'	6	11	3	3	III' - 6 · I'
I''	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
II''	0	4	1	4	$\frac{1}{4}II''$
III''	0	8	3	0	
I'''	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$I''' - \frac{1}{2} \cdot II'''$
II'''	0	1	$\frac{1}{4}$	1	
III'''	0	8	3	0	III''' - 8 · II'''
I ⁽⁴⁾	1	0	$-\frac{1}{8}$	0	$I^{(4)} + \frac{1}{8} \cdot III^{(4)}$
II ⁽⁴⁾	0	1	$\frac{1}{4}$	1	$II^{(4)} - \frac{1}{4} \cdot III^{(4)}$
III ⁽⁴⁾	0	0	1	-8	
I ⁽⁵⁾	1	0	0	-1	
II ⁽⁵⁾	0	1	0	3	
III ⁽⁵⁾	0	0	1	-8	
	C			d	

$$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = -8$$

Beispiel 2

•

Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{cccc|c}
 \boxed{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 -4 & 2 & 1 & -4 & 1 & 2 \\
 6 & 11 & 3 & 0 & 0 & 3 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & \boxed{4} & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 8 & 3 & -3 & 0 & 0 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 4 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -8
 \end{array}$$

$\Rightarrow x_4 := \lambda_1 \in \mathbb{R}$ beliebig,

$x_5 := \lambda_2 \in \mathbb{R}$ beliebig

$\Rightarrow x_3 = -8 - \lambda_1 + 2\lambda_2$

$\Rightarrow x_2 = 3 + \frac{3}{4}\lambda_1 - \frac{1}{4}\lambda_2$

$\Rightarrow x_1 = -1 - \frac{7}{8}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2$

Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\begin{array}{cccc|c}
 \boxed{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 -4 & 2 & 1 & -4 & 1 & 2 \\
 6 & 11 & 3 & 0 & 0 & 3 \\
 \hline
 \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
 -4 & 2 & 1 & -4 & 1 & 2 \\
 6 & 11 & 3 & 0 & 0 & 3 \\
 \hline
 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
 0 & \boxed{4} & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 8 & 3 & -3 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\
 0 & 8 & 3 & -3 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\
 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & -8 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & -1 \\
 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 3 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -8
 \end{array}$$

$\Rightarrow x_N = (x_4, x_5)^T := (\lambda_1, \lambda_2)^T \in \mathbb{R}^2$ beliebig

$$\Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3

Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{ccccc|c}
 \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 -4 & 2 & 1 & 1 & -4 & 2 \\
 6 & 11 & 2 & 3 & 0 & 3 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & \boxed{4} & 1 & 1 & -2 & 4 \\
 0 & 8 & 2 & 3 & -3 & 0 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -8
 \end{array}$$

$\Rightarrow x_3 = \lambda_1 \in \mathbb{R}$ beliebig,

$x_5 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ beliebig

$\Rightarrow x_4 = -8 - \lambda_2$

$\Rightarrow x_2 = 3 - \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{3}{4}\lambda_2$

$\Rightarrow x_1 = -1 + \frac{1}{4}\lambda_1 - \frac{7}{8}\lambda_2$

Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\begin{array}{ccccc|c}
 \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 -4 & 2 & 1 & 1 & -4 & 2 \\
 6 & 11 & 2 & 3 & 0 & 3 \\
 \hline
 \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 -4 & 2 & 1 & 1 & -4 & 2 \\
 6 & 11 & 2 & 3 & 0 & 3 \\
 \hline
 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 0 & \boxed{4} & 1 & 1 & -2 & 4 \\
 0 & 8 & 2 & 3 & -3 & 0 \\
 \hline
 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\
 0 & 8 & 2 & 3 & -3 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 \\
 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\
 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -8 \\
 \hline
 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{8} & -1 \\
 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -8
 \end{array}$$

$\Rightarrow x_N = (x_3, x_5)^T := (\lambda_1, \lambda_2)^T \in \mathbb{R}^2$ beliebig

$$\Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4

•

Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{cccc|c}
 \boxed{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 -4 & 2 & 1 & -4 & 1 & 2 \\
 6 & 11 & 3 & 0 & 0 & 3 \\
 2 & 5 & 2 & 0 & -1 & -3 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & \boxed{4} & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 8 & 3 & -3 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & 2 & -1 & -1 & -4 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 4 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & -8 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -8 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 4 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -8 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\begin{array}{cccc|c}
 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 -4 & 2 & 1 & -4 & 1 & 2 \\
 6 & 11 & 3 & 0 & 0 & 3 \\
 2 & 5 & 2 & 0 & -1 & -3 \\
 \hline
 & & \vdots & & & \vdots \\
 & & \vdots & & & \vdots \\
 & & \vdots & & & \vdots \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & -1 \\
 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 3 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -8 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

⇒ letzte Zeile ist Nullzeile

⇒ kann gestrichen werden

⇒ Lösung des verbleibenden Systems siehe Beispiel 2

Beispiel 5

•

Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{cccc|c}
 \boxed{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 -4 & 2 & 1 & -4 & 1 & 2 \\
 6 & 11 & 3 & 0 & 0 & 3 \\
 2 & 5 & 2 & 0 & -1 & -2 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & \boxed{4} & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 8 & 3 & -3 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & 2 & -1 & -1 & -3 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 4 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & -8 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -7 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 4 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -8 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\begin{array}{cccc|c}
 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 -4 & 2 & 1 & -4 & 1 & 2 \\
 6 & 11 & 3 & 0 & 0 & 3 \\
 2 & 5 & 2 & 0 & -1 & -2 \\
 \hline
 & & \vdots & & & \vdots \\
 & & \vdots & & & \vdots \\
 & & \vdots & & & \vdots \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & -1 \\
 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 3 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -8 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ die zur letzten Zeile zugehörige Gleichung ist unlösbar

$\Rightarrow$ das Gleichungssystem hat keine Lösung