

# Grafische Lösung linearer Optimierungsprobleme

$$(P) \quad \min \quad c^T x + c_0 = z \quad , \quad c, x \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{bzgl.} \quad Ax \leq b \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{m \times 2}, b \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$$

$$x \geq 0$$

- $i$ -te Ungleichung in  $Ax \leq b$  definiert Halbebene, die durch die Gerade

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

begrenzt wird

- Schnitt aller Halbebenen definiert die zulässige Menge

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

- Existenz von Lösungen:

– Fall 1:  $G = \emptyset \Rightarrow$  es gibt keine Lösung

– Fall 2:  $G$  ist nichtleer und beschränkt  $\Rightarrow$  es gibt Lösung(en)

– Fall 3:  $G$  ist nichtleer und unbeschränkt und  $z$  ist auf  $G$  ...

\* ... nach unten beschränkt  $\Rightarrow$  es gibt Lösung(en)

\* ... nicht nach unten beschränkt  $\Rightarrow$  es gibt keine Lösung

## Schritte zur grafischen Lösung von (P):

- Schritt 1: Einzeichnen der Begrenzungsgeraden der Halbebenen in ein Koordinatensystem (ggf. in geeignetem Maßstab), dies erfolgt durch Bestimmung von zwei *verschiedenen* Punkten jeder Geraden

$$ax_1 + bx_2 = c$$

- Variante 1: Umformung der Geradengleichung, d.h.

$$x_2 = -\frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b}, \quad b \neq 0$$

→ wähle zwei *verschiedene* Werte für  $x_1$  und berechne den zugehörigen  $x_2$ -Wert

- Variante 2: Auswahl verschiedener Wertepaare  $(x_1, x_2)$

\* Fall 1:  $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow$  wähle z.B.

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{c}{b} \quad \text{bzw.} \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{c}{a}$$

\* Fall 2:  $a = 0, b \neq 0 \Rightarrow x_2 = \frac{c}{b}$  (Gerade parallel zur  $x_1$ -Achse)

\* Fall 3:  $a \neq 0, b = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{c}{a}$  (Gerade parallel zur  $x_2$ -Achse)

- Schritt 2: Bestimmung der zulässigen Menge  $G$

- die durch die Ungleichung

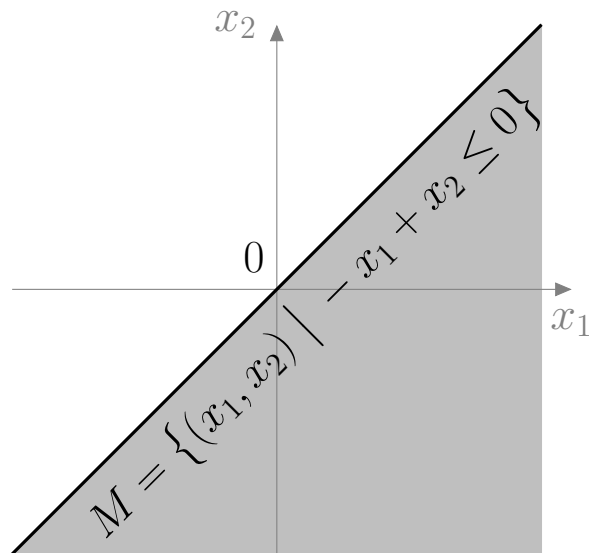
$$ax_1 + bx_2 \leq c$$

definierte Halbebene  $M$  ist durch das Relationszeichen „ $\leq$ “ festgelegt; für die Lage von  $M$  bzgl. der Begrenzungsgeraden

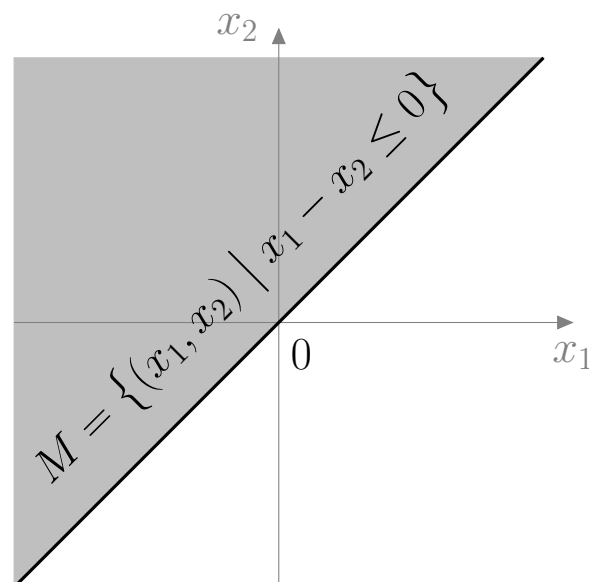
$$g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ax_1 + bx_2 = c\}$$

ergeben sich folgende Fälle:

\* Fall 1:  $a \in \mathbb{R}, b > 0 \Rightarrow M$  liegt unterhalb von  $g$

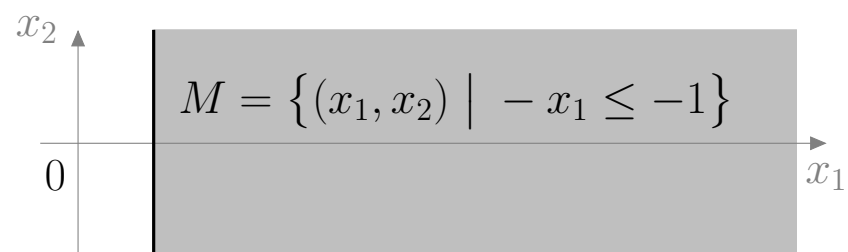


\* Fall 2:  $a \in \mathbb{R}, b < 0 \Rightarrow M$  liegt oberhalb von  $g$



\* Fall 3:  $a > 0, b = 0 \Rightarrow M$  liegt links von  $g$

\* Fall 4:  $a < 0, b = 0 \Rightarrow M$  liegt rechts von  $g$



– analog Fallunterscheidung für Ungleichungen des Typs

$$ax_1 + bx_2 \geq c$$

– Alternative zu obiger Fallunterscheidung: Punkt außerhalb der Geraden  $g$  einsetzen und die Gültigkeit der Ungleichung überprüfen

- Schritt 3: Wähle eine spezielle Niveaulinie aus (d.h. setze  $z = z_0$ ) und verschiebe diese Niveaulinie parallel in Richtung
  - $-\nabla z = -c$  (bei Minimierungsproblemen) bzw.
  - $\nabla z = c$  (bei Maximierungsproblemen)

bis zu einer „optimalen“ Ecke oder Kante/Randfacette.

Anschaulich gilt: Eine Ecke/Kante ist optimal, wenn die Niveaulinie nicht mehr weiter verschoben werden kann, ohne den zulässigen Bereich zu verlassen.

- Schritt 4: Lösungsangabe

- eindeutig  $\rightarrow$  Ecke  $x^*$

- mehrdeutig:

- \* Kante durch zwei Ecken  $x^1$  und  $x^2$ :

$$x^* = \lambda x^2 + (1 - \lambda)x^1, \quad \lambda \in [0, 1]$$

- \* Randfacette mit Ecke  $x^1$ :

$$x^* = \lambda x^2 + (1 - \lambda)x^1, \quad \lambda \geq 0 ,$$

wobei  $x^2$  ein beliebiger Punkt auf der Randfacette ist