

Normalformen / Standardform

$$\begin{aligned}
 (\text{LOP}) \quad \min \quad & c^T x + c_0 \quad \text{bzgl.} \quad \tilde{A}x \leq \tilde{b} \\
 & Bx \geq d \\
 & Gx = f \\
 & l \leq x \leq u
 \end{aligned}$$

1. Normalform

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c^T x \\
 \text{bzgl.} \quad & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

2. Normalform (Standardform)

$$\begin{aligned}
 (\text{LOP}_S) \quad \min \quad & c^T x \\
 \text{bzgl.} \quad & Ax = b \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

Umformungsschritte (LOP) $\rightarrow$ 1. oder 2. Normalform:

- Weglassen der Konstanten $c_0 \rightarrow \min(c^T x + c_0) = c_0 + \min(c^T x)$
- Maximierungsproblem: $\max c^T x \Leftrightarrow \min -c^T x$
- $Bx \geq d \Leftrightarrow -Bx \leq -d$
- Schranken sind spezielle Ungleichungsnebenbedingungen, d.h.

$$l \leq x \leq u \Leftrightarrow Ex = x \leq u \wedge -Ex = -x \leq -l$$

- Ersatz nicht vorzeichenbeschränkter (freier) Variablen x_i durch zwei vorzeichenbeschränkte Variablen $x_i^+ \geq 0$ und $x_i^- \geq 0$, d.h. $x_i = x_i^+ - x_i^-$

- Gleichungen $\rightarrow$ Ungleichungen:

$Gx = f$ ist äquivalent zu

$$Gx \leq f \wedge -Gx \leq -f$$

- Ungleichungen $\rightarrow$ Gleichungen:

Verwendung von *Schlupfvariablen*

$$\tilde{A}x \leq \tilde{b} \Leftrightarrow \tilde{A}x + s = \tilde{b}, \quad s \geq 0$$

LOP in kanonischer Form, Basislösungen

$$(\text{LOP}_S) \quad \min \quad c^T x \quad \text{bzgl.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

- zulässiger Bereich:

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \textcolor{red}{x} \geq 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$$

- Ziele: - Umformung von $Ax = b$ zur Bestimmung von Ecken von G
- Bestimmung optimaler Ecken

- **Voraussetzung:** A hat vollen Zeilenrang, d.h. $\text{rank}(A) = m \leq n$

- Sei $a^{i_1}, \dots, a^{i_m}$ eine Auswahl von m linear unabhängigen Spalten von A , wobei $I_B := \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Setze

$$A_B := (a^i)_{i \in I_B} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \text{und} \quad A_N := (a^j)_{j \notin I_B} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$$

sowie die zugehörigen Basis-/Nichtbasisvariable

$$x_B := (x_i)_{i \in I_B} \in \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad x_N := (x_j)_{j \notin I_B} \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

- Es gilt: $\text{rank}(A_B) = m \Leftrightarrow A_B$ ist invertierbar. Damit folgt:

$$\begin{aligned} Ax &= (A_B \mid A_N) \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = A_B x_B + A_N x_N = b \\ \Leftrightarrow \quad x_B + A_B^{-1} A_N x_N &= A_B^{-1} b \end{aligned}$$

- $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ heißt Basislösung von (LOP_S) , falls $Ax = A_B x_B + A_N x_N = b$ und $x_N = 0$. Gilt außerdem $x_B \geq 0$, dann heißt x zulässige Basislösung.
 $\Rightarrow x_B = p := A_B^{-1} b, x_N = 0$ ist *eine* Basislösung (zulässig, falls $p \geq 0$)

- aus

$$x_B + Dx_N = p \quad \text{mit} \quad D := A_B^{-1}A_N, \quad p := A_B^{-1}b$$

folgt

$$\begin{aligned} z &= c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T \cdot (p - Dx_N) + c_N^T x_N \\ &= \underbrace{c_B^T p}_{=: z_0} + \underbrace{(c_N^T - D^T c_B^T)}_{=: h^T} x_N = z_0 + h^T x_N \end{aligned}$$

- die Darstellung

$$\min \quad z = z_0 + h^T x_N \quad \text{bzgl.} \quad x_B + Dx_N = p$$

heißt kanonische Form von (LOP_S)

- $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Ecke von $G \Leftrightarrow x$ ist eine zulässige Basislösung

- **Spezialfall:** (LOP) in 1. Normalform

$$\min \quad c^T v \quad \text{bzgl.} \quad Av \leq b, \quad v \geq 0$$

mit $\boxed{b \geq 0}$ (!) $\Rightarrow$ Hinzunahme von m Schlupfvariablen

$$s := (s_1, \dots, s_m)^T \geq 0$$

liefert

$$Av + s = (A|E) \begin{pmatrix} v \\ s \end{pmatrix} = b,$$

und damit die zulässige Basislösung

$$x_B = s = b \geq 0, \quad x_N = v = 0$$

- Reguläre und ausgeartete Ecken:

Eine Ecke heißt regulär, falls $x_i > 0$ für alle $i \in I_B$. Sie heißt ausgeartet, falls es einen Index $i \in I_B$ gibt mit $x_i = 0$.

geometrische Interpretation: In einer ausgearteten Ecke gelten mehr als n Gleichungsnebenbedingungen. Beispiel:

$$G = \{(x_1, x_2)^T \mid -x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\}$$

Simplex-Starttableau

Ausgangspunkt: (LOP_S) in kanonischer Form

→ zugehörige Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 0 & E & D \\ -1 & 0^T & h^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -z_0 \end{pmatrix}$$

→ abkürzend als Simplex-Tableau

	x_B^T	x_N^T	
x_B	E	D	p
$-z$	0^T	h^T	$-z_0$