

Simplex-Verfahren Phase I

$$(P) \quad \begin{array}{l|l} \min & c^T x = z(x) \\ \text{bzgl.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} c \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

- aus kanonischer Form von (P) ergibt sich das Simplex-Starttableau

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_B^T & x_N^T & \\ \hline x_B & E & D & p \\ \hline -z & 0^T & h^T & -z_0 \end{array}$$

- **Problem:** Phase II kann nur gestartet werden, wenn die Basislösung $(x_B, x_N)^T = (p, 0)^T$ zulässig ist, d.h. wenn $p_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$
 $\Rightarrow$ Lösung im Fall $p_i < 0, i \in \{1, \dots, m\}$?

- **Phase I** $\leftrightarrow$ Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung für (P) durch Lösung einer Hilfsaufgabe (H) mit Phase II

$$(H) \quad \begin{array}{l|l} \min & e^T y = h(x, y) \\ \text{bzgl.} & Ax + y = b \\ & x, y \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Hilfszielfunktion, } e^T = (1, 1, \dots, 1) \\ y \dots \text{Scheinvariablen} \end{array}$$

- **Voraussetzungen:**

1. A hat vollen Zeilenrang, d.h. $\text{rank}(A) = m \leq n$.
2. Alle Ecken von G sind regulär.
3. $b \geq 0$ ($\rightarrow$ immer erreichbar!)

• **Konstruktion des Starttableaus zur Hilfsaufgabe:**

1. Multipliziere alle Gleichungen in $Ax = b$ mit $b_i < 0$ mit -1 .
2. Ergänze *jede* Gleichung mit einer Scheinvariablen $y_i \geq 0, i = 1, \dots, m$.
3. Definiere die Hilfszielfunktion

$$h(x, y) = e^T y = \sum_{i=1}^m y_i$$

4. Wähle als erste Ecke der Hilfsaufgabe

$$(x, y) = (0, b) ,$$

d.h. $x_1, \dots, x_n$ sind Nichtbasis- und $y_1, \dots, y_m$ sind Basisvariablen.

5. Drücke h durch die Nichtbasisvariablen $x_1, \dots, x_m$ aus:

$$\begin{aligned} y_i &= b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^m y_i &= \underbrace{\sum_{i=1}^m b_i}_{=: h_0} - \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)}_{=: q_j} \cdot x_j =: h_0 + q^T x \end{aligned}$$

• Simplex-Starttableau für (H):

	x^T	y^T	
y	A	E	b
$-z$	c^T	0^T	$-z_0$
$-h$	q^T	0^T	$-h_0$

Achtung: Zielfunktion von (P) wird mitgeführt (z -Zeile)!

- Die Hilfsaufgabe (H) ist immer lösbar (da h nach unten beschränkt und der zulässige Bereich nichtleer ist).

- **Auswertung der Lösung der Hilfsaufgabe:**

- Fall 1: $h_{\min} > 0$ und $y \neq 0 \Leftrightarrow$ (P) ist unzulässig!
- Fall 2: $h_{\min} = 0$ und $y = 0 \Leftrightarrow$ die Variablen $x_1, \dots, x_n$ bilden eine zulässige Basislösung von (P).

weiteres Vorgehen: streiche die y -Spalten und die h -Zeile und setze mit Phase II ggf. die Minimierung bzgl. z fort

- Spezialfälle:

- Problem in kanonischer Form (s.o.) und es gibt genau ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $p_i < 0$, d.h. die Basislösung $(x_B, x_N)^T = (p, 0)^T$ ist nicht zulässig.
 $\Rightarrow$ multipliziere die i -te Gleichung mit -1 , ergänze diese anschließend mit *einer* Scheinvariablen $y \geq 0$

$$\Rightarrow \quad h(x, y) = -b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

$\Rightarrow$ bei der Lösung der Hilfsaufgabe (H) können die Variablen

$$(x_B)_1, \dots, (x_B)_{i-1}, (x_B)_{i+1}, \dots, (x_B)_m, y$$

als Basisvariable gewählt werden, wobei $(x_B)_j$ die j -te Komponente von x_B bezeichnet (Hinweis: Es gilt *nicht* notwendig $(x_B)_j = x_j$!)

- analoges Vorgehen für den Fall, dass in der kanonischen Form $p_i < 0$ für mehr als ein, aber nicht alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt
- vgl. auch Vorlesung für den Fall von Problemen in 1. Normalform
- weitere Sonderfälle sind möglich, z.B. wenn das LOP Ungleichungs- *und* Gleichungsnebenbedingungen enthält