Simplex-Verfahren Phase II

$$
\begin{array}{lrcl|l}
(P) & \min & c^T x & = & z(x) & c \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n \\
 & \text{bzgl.} & Ax & = & b & A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m \\
 & & x & \geq & 0 &
\end{array}
$$

- Ziel: Lösung von (P) $\Leftrightarrow$ Bestimmung optimaler Ecken des zulässigen Bereichs G von (P) $\Leftrightarrow$ Funktionswertverbesserung durch „systematisches Ablaufen“ der Ecken von G

- Voraussetzungen

  1. A hat vollen Zeilenrang, d.h. $\operatorname{rank}(A) = m \leq n$.
  2. Alle Ecken von G sind regulär.
  3. Eine Ecke x^0 mit der Basisdarstellung $x_B^0 = p > 0$, $x_N^0 = 0$ ist bekannt.

- Simplex-Tableau: Aus zulässiger kanonischer Form von (P)

$$\min \quad z = z_0 + h^T x_N \qquad \text{bzgl.} \qquad x_B + D x_N \;=\; p$$

ergibt sich die Tableau-Darstellung

	x_B^T	x_N^T	
x_B	E	D	p
$-z$	0^T	h^T	$-z_0$

- Funktionswertanalyse

(1) Es gilt $h_k \geq 0$ für $k = 1, \ldots, n-m \Rightarrow$ Das Tableau ist optimal, der Punkt $(x_B, x_N) = (p, 0)$ ist zulässige Basislösung und optimal.

(2) Es gibt ein $k \in \{1, \ldots, n-m\}$ mit $h_k < 0$ und $d_{ik} \leq 0$ für $i = 1, \ldots, m$ $\Rightarrow$ Das Optimierungsproblem besitzt keine Lösung, da der zulässige Bereich unbeschränkt ist bzw. die Zielfunktion in Richtung wachsender x_i-Werte unbeschränkt ist.

(3) Für alle k mit $h_k < 0$ gibt es mindestens ein i mit $d_{ik} > 0 \Rightarrow$ Das Tableau ist nicht entscheidbar, man kann von einer Ecke x zu einer Ecke x^* übergehen mit $z(x^*) \leq z(x)$.

- Simplex-Austauschschritt [im Fall (3)]:

1. Ermittle Spaltenindex k, so dass $h_k < 0$ minimal und im Fall der Mehrdeutigkeit k kleinstmöglich.
2. Ermittle Zeilenindex l mit

$$\frac{p_l}{d_{lk}} = \min \left\{ \frac{p_i}{d_{ik}} \;\middle|\; d_{ik} > 0, \;\; i \in \{1, \ldots, m\} \right\}$$

(falls mehrdeutig, dann wähle den kleinsten Index l).

$$\Rightarrow x_{N,k} = \frac{p_l}{d_{lk}} \qquad \Rightarrow \qquad x_{B,l} = p_l - d_{lk} \cdot \frac{p_l}{d_{lk}} = 0$$

3. Austauschschritt: x_k wird Basisvariable, x_l wird Nichtbasisvariable

Durchführung: Gauß-Jordan-Verfahren mit d_{lk} als Pivotelement

- wichtige Aussagen (vgl. Vorlesung):

  – Erreicht der Simplex-Algorithmus eine reguläre Ecke, in der keiner der entscheidbaren Fälle (1) oder (2) vorliegt, so verkleinert sich der Funktionswert von z im folgenden Austauschschritt.

  – Gilt $\text{rank}(A) = m$ und sind alle Ecken des zulässigen Bereichs regulär, so endet der Simplex-Algorithmus nach endlich vielen Schritten. Besitzt das Problem Lösung(en), so wird eine der optimalen Ecken erreicht.

- Umgang mit ausgearteten Ecken:

$$x = \big(x_B, x_N\big) \quad \text{mit} \quad x_N = 0 \ \text{ und } \ \exists\, i \in I_B : \quad x_{B,i} = p_i = 0$$

Austauschschritt kann wie oben durchgeführt werden, hierbei kann

$$\frac{p_l}{d_{lk}} = 0$$

auftreten. In diesem Fall erfolgt ein „Null-Austausch“, d.h. Punkt und Zielfunktionswert bleiben unverändert; die Basisdarstellung der ausgearteten Ecke ändert sich und ermöglicht ggf. anschließend Verkleinerung von z.

ACHTUNG! Es besteht die Gefahr zyklischer Vertauschungen!

Maßnahmen gegen Zyklen:

1. Wähle stets die Pivotspalte so, dass $h_k < 0$ minimal und k kleinstmöglich.
2. Stehen mehrere Pivotzeilen zur Auswahl, dann wähle die zum kleinsten Index l.