

Transportalgorithmus

- Aus m Ausgangsorten (z.B. Lagern) A_i werden n Bestimmungsorte (z.B. Baustellen) B_j mit einem (homogenen) Gut versorgt.
- Fragestellung: Wie sind die Transporte kostensparend zu organisieren?
- feste Größen:
 - Vorräte im i -ten Lager : $a_i \geq 0, i=1, \dots, m$
 - Bedarf der j -ten Baustelle : $b_j \geq 0, j=1, \dots, n$
 - Transportkosten von A_i nach B_j : c_{ij}
- Variablen:
 - Transportmengen von A_i nach B_j : x_{ij}

- Transportproblem (TP):

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = z$$

$$\text{bzgl.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

- Existenz von Lösungen für (TP) wird durch die Gleichgewichtsbedingung gesichert (notwendige und hinreichende Bedingung, vgl. Vorlesung):

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

- (TP) liegt in Standardform vor $\Rightarrow$ Lösung mit dem Simplex-Verfahren möglich, aber hoher Rechenaufwand

• **Transportalgorithmus:**

- **Schritt 1:** Bestimmung eines zulässigen Transportplans (d.h. einer ersten zulässigen Ecke, wo $x \geq 0$ genau $k = \text{rank}(A) = n + m - 1$ Nicht-Nullelemente hat) $\rightarrow$ hier mit der **Nord-West-Eckenregel:** Formeln siehe Vorlesungsfolien; anschaulich: „*Decke den Bedarf von Kunde B_1 aus den Lagern A_1 bis A_m ab. Mit den verbliebenen Vorräten in den Lagern A_1 bis A_m decke den Bedarf von Kunde B_2 ab. Setze dieses Prinzip solange fort, bis alle Lager leer sind und jeder Kunde seine Lieferung erhalten hat.*“

Ist der Bedarf eines Kunden B_j abgedeckt, so werden die restlichen Einträge in Spalte j der Transportmatrix leer gelassen (Nichtbasisvariable). Ausnahme: Verbliebener Bedarf des Kunden B_j ist gleich dem verbliebenen Bestand des Lagers A_i , dann muss der nächste Eintrag eine Null sein (= Basisvariable, d.h. degenerierte Ecke).

- **Schritt 2:** Bestimmung der $n + m$ Potentiale $u = (u_1, \dots, u_m)$ und $v = (v_1, \dots, v_n)$ mit $\boxed{u_i + v_j = c_{ij}}$ für alle $(i, j) \in I_B$, d.h. x_{ij} ist Basisvariable.

(TP) hat $n + m$ Unbekannte, aber nur $n + m - 1$ Gleichungen $\Rightarrow$ ein Freiheitsgrad $\Rightarrow$ wähle immer $\boxed{u_1 = 0} \Rightarrow v_1 = c_{11} - u_1$ usw.

Optimalitätstest: Berechne $\boxed{\gamma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j}$ für alle $(i, j) \notin I_B$, d.h. x_{ij} ist Nichtbasisvariable.

Transportplan ist nicht optimal, falls es ein $\gamma_{kl} < 0$ gibt ($\rightarrow$ Kosten

können verringert werden $\Rightarrow$ Austauschschritt). Falls $\gamma_{ij} \geq 0$ für alle $(i, j) \notin I_B$, dann ist der Transportplan optimal.

– **Schritt 3** - Austauschschritt: „Verschiebung“ von Transportmengen

3.1: Bestimmung eines Zyklus, d.h. eine Folge von Doppelindizes, die aus jeder Zeile und jeder Spalte der Transportmatrix höchstens zwei Felder enthält

Vorgehensweise: Beginne mit „+“ in dem Feld, wo $\gamma_{kl} < 0$ ist, dann in der gleichen Zeile einmal „–“, in dieser Spalte dann einmal „+“ usw.

3.2: Bestimme $\delta = \min \{x_{ij} \mid (i, j) \in I_B \text{ ist mit „–“ markiert}\} = x_{rs}$.

3.3: Setze in allen Zyklus-Feldern $x_{ij} = x_{ij} \pm \delta$.

Ergebnis: x_{rs} verläßt die Basis und wird gegen x_{kl} ausgetauscht. Die

Kosten des so erhaltenen Transportplans sind $\boxed{K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} + \gamma_{kl} \cdot \delta}$

Beispielschema:

I	B_1	B_2	B_3	
A_1	x_{11}^-	x_{12}^+		a_1
A_2		x_{22}		a_2
A_3		x_{32}^-	x_{33}^+	a_3
A_4	+		x_{43}^-	a_4
b_j	b_1	b_2	b_3	

„Transportmatrix“

II	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1	$\boxed{c_{11}}$	$\boxed{c_{12}}$	$\frac{c_{13}}{\gamma_{13}}$	u_1
A_2	$\frac{c_{21}}{\gamma_{21}}$	$\boxed{c_{22}}$	$\frac{c_{23}}{\gamma_{23}}$	u_2
A_3	$\frac{c_{31}}{\gamma_{31}}$	$\boxed{c_{32}}$	$\boxed{c_{33}}$	u_3
A_4	$\frac{c_{41}}{\gamma_{41}}$	$\frac{c_{42}}{\gamma_{42}}$	$\boxed{c_{43}}$	u_4
v_j	v_1	v_2	v_3	

„Kostenmatrix“