Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015

Aufgaben zur 1. Übung (07.-10.04.2015)

(Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit)

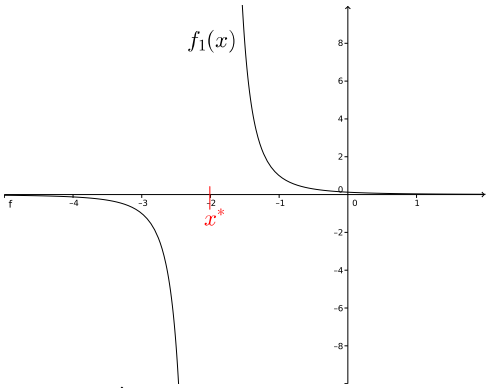
Vorbereitungsaufgabe:

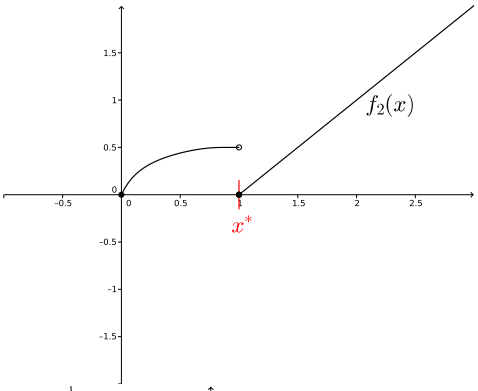
1. Wiederholen Sie aus W-1 die Definitionen, Sätze und Beispiele von Kapitel 3.3 zum Thema Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit.

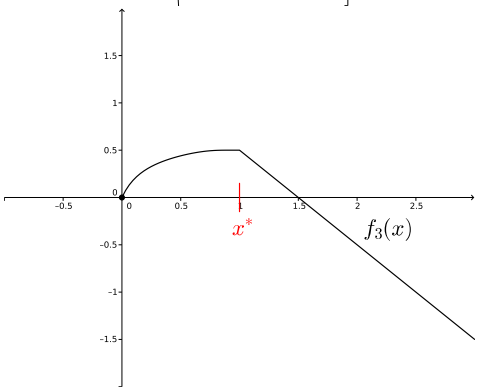
   (a) Bestimmen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert von $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^3}$ an der Stelle $x^* = -2$. Was gilt dann für den Grenzwert $\lim\limits_{x \to x^*} f(x)$?

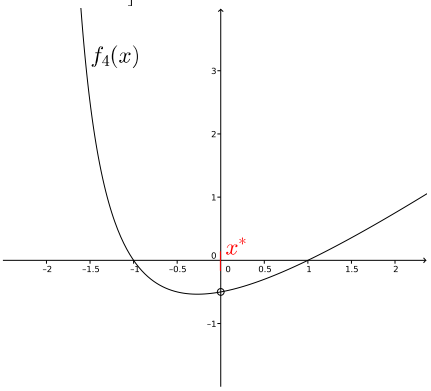
   (b) Welche Eigenschaften muss eine Funktion $f(x)$ erfüllen, damit sie an der Stelle x^* stetig ist?

   (c) Gegeben seien folgende Graphen von Funktionen. Welche Funktionen sind in x^* stetig? Um welche Unstetigkeitsart (Polstelle, hebbare Unstetigkeitsstelle bzw. Lücke, Sprungstelle) handelt es sich ggf.?









Aufgaben für die Übung:

2. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5}{x^3+2x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{\ln x}{x+1}$

   (d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{(x+2)^2}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$

3. Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}} & , \ 0 \le x < 1 \\ x-1 & , \ x \ge 1 \end{cases}$$

   in $x^* = 1$ stetig? Geben Sie ggf. die Art der Unstetigkeit an.

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$.

   (a) Erläutern Sie, warum f in $\mathbb{R}$ nicht stetig ist.

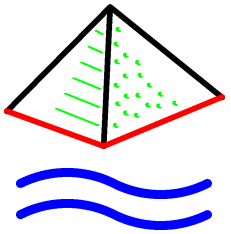
   (b) Betrachten Sie nun die Funktion $g(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \neq \pm 1 \\ a & , \ x = -1 \\ b & , \ x = 1. \end{cases}$

   Wie müssen die Parameter a, $b \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion in $\mathbb{R}$ stetig ist?

5. *(Zusatz)* Ermitteln Sie alle Nullstellen, Polstellen, Lücken sowie Asymptoten der gebrochen-rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x^3-x}{x^2+2x}.$$

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 10. Übung (09.-12.06.2015)

(Unbestimmtes und bestimmtes Integral, partielle Integration)

Vorbereitungsaufgabe:

1. (a) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale:

$$(i)\quad \int (8x+\sin x)\,dx, \qquad (ii)\quad \int \left(4x^5+\frac{1}{x}-2^x\right)dx, \qquad (iii)\quad \int_{-1}^{-2}\left(e^x-\frac{4}{x}\right)dx$$

   (b) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x)=5-\frac{1}{2}x^2, \quad g(x)=5-3x, \quad h(x)=x^2-2x+3.$$

   Die Graphen der drei Funktionen schließen im I. Quadrant ein Gebiet G vollständig ein. Skizzieren Sie die Funktionen f, g und h, und kennzeichnen Sie das Gebiet G.

Aufgaben für die Übung:

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int \left(\cos x+\tan^2 x\right)dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{2(x\sqrt{x}-1)^2}{x^3}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{0.5}^{1}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx+\int_{0}^{0.5}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

3. Gegeben seien die Funktionen f, g und h aus Aufgabe 1(b). Berechnen Sie den Flächeninhalt von G.

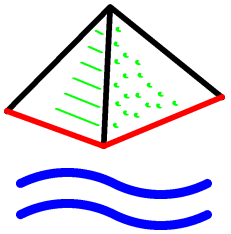
4. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit partieller Integration:

   (a) $\displaystyle\int x\cdot\sin x\,dx,$ (b) $\displaystyle\int(\ln x)^2\,dx$

5. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit partieller Integration:

   (a) $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{1}{x^2}\cdot\ln x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}e^x\cdot\cos x\,dx$

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 11. Übung (16.-19.06.2015)

(Integration durch Substitution, Integration rationaler Funktionen)

Vorbereitungsaufgabe:

1. (a) Gegeben sei das Integral

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+1}}\,dx.$$

Substituieren Sie $z = \Psi(x) := 2x^3+3x^2+6x+1$, und bilden Sie das totale Differential $dz = \Psi'(x)dx$. Welches Integral ergibt sich mit dieser Substitution? Berechnen Sie das unbestimmte Integral.

(b) Führen Sie eine Partialbruchzerlegung für die folgende rationale Funktion durch:

$$f(x) = \frac{3x+5}{x^2+4x+4}$$

Aufgaben für die Übung:

2. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit einer geeigneten Substitution:

(a) $\int \sin(2x)\,dx$ (b) $\int \frac{1}{(3-x)^5}\,dx$

(c) $\int \frac{x+2}{(x-1)^2}\,dx$ (d) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad |x|<1$

(e) $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

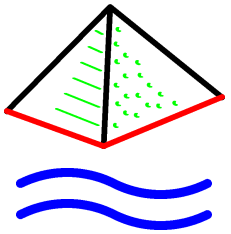
3. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mittels Substitution:

(a) $\int_0^1 \sqrt{2x+3}\,dx$ (b) $\int_{-1}^1 x\cdot e^{-x^2}\,dx$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x\,dx$

4. Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung:

(a) $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+4}\,dx$ (b) $\int \frac{-8}{x^3+4x}\,dx$

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 12. Übung (23.-26.06.2015)

(Uneigentliche Integrale, Mehrfachintegrale)

Vorbereitungsaufgabe:

1. (a) Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Beispiele (konvergente bzw. divergente) uneigentliche Integrale sind.

$$(i)\ \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \qquad (ii)\ \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \qquad (iii)\ \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \qquad (iv)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$$

(b) Gegeben sei das Zweifachintegral

$$\int_{y=-1}^{1}\int_{x=1}^{2} \frac{y^2}{x^2}\,dxdy.$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich, und berechnen Sie das Integral.

Aufgaben für die Übung:

2. Berechnen Sie, falls möglich, folgende uneigentliche Integrale:

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ (b) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\cdot \ln x\,dx$ (c) $\int_{-\infty}^0 \sin(2x)\,dx$

(d) $\int_0^1 \ln x\,dx$ (e) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

3. Berechnen Sie das folgende Doppelintegral, und skizzieren Sie den Integrationsbereich. Interpretieren Sie den Wert des Integrals.

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=x}^{2x} (x+y^2)\,dy\,dx$$

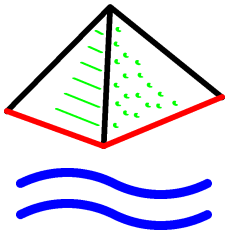
4. Schreiben Sie die folgenden Flächenintegrale als Mehrfachintegrale, und berechnen Sie ihre Werte. Skizzieren Sie die Integrationsbereiche.

   (a) $\iint\limits_A xy \, dA$ A ist die (endliche) Fläche zwischen den Funktionen $y = x$ und $y = x^2$ im I. Quadrant

   (b) $\iint\limits_B x^2 \, dB$ B ist das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken in $(0, 0)$, $(2, 1)$ und $(-1, 1)$

   Zusatz: Geben Sie B als Normalbereich bzgl. x und bzgl. y an.

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 13. Übung (30.06.-03.07.2015)

(Separierbare DGL 1. Ordnung)

Vorbereitungsaufgabe:

1. Gegeben sei für die Funktion $y = y(x)$ die Differentialgleichung (kurz: DGL)

$$y \cdot y' = 1.$$

   (a) Erläutern Sie, warum es sich hierbei um eine **separierbare** DGL **1.Ordnung** handelt. Geben Sie die DGL in expliziter Form an.
   Was versteht man unter einem Richtungsfeld und den Isoklinen?

   (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = \sqrt{2x}$ das Anfangswertproblem mit $y(1) = \sqrt{2}$ dieser DGL löst.

   (c) Obige DGL kann durch die Separationsmethode gelöst werden, indem man die Variablen x und y jeweils auf eine Seite bringt und anschließend integriert. Welche Integralgleichung entsteht?

Aufgaben für die Übung:

2. Skizzieren Sie die Richtungsfelder für folgende Differentialgleichungen und geben Sie die Isoklinen an:

   (a) $yy' = 1$ (b) $xy' = 2y$

3. Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an:

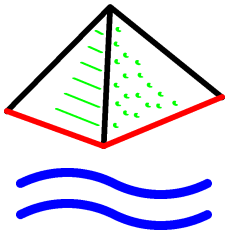
   (a) $yy' = 1,$ (b) $xy' = 2y$

4. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy' = y^2 + 1, \quad y(1) = 1.$$

5. Gegeben sei die Preiselastizität der Nachfrage durch $\epsilon_{x,p} = 2p^2 - 3p + 4,\ p > 0$. Man ermittle die Preis-Absatz-Funktion $x = x(p)$ unter der Annahme, dass bei einem Preis von 3 GE/ME der Absatz 162 ME beträgt.

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 14. Übung (07.07.-10.07.2015)

(Lineare DGL 1. Ordnung)

Vorbereitungsaufgabe:

1. Die allgemeine Form einer linearen DGL 1.Ordnung ist gegeben durch

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

   (a) Wie setzt sich die allgemeine Lösung zusammen?

   (b) Geben Sie die zugehörige homogene DGL an. Wie löst man diese?

   (c) Angenommen, die homogene DGL wird durch $y_{hom} = c \cdot f(x)$, $c = const.$, gelöst. Was versteht man unter **Variation der Konstanten** zum Lösen der inhomogenen DGL?

   (d) Geben Sie die Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ für die folgende DGL an:

$$(1+x)y' = x^2 - 2y.$$

Aufgaben für die Übung:

2. Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen an:

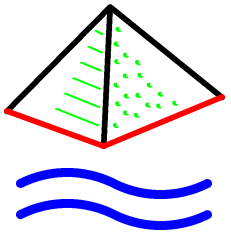
   (a) $y' - 2xy = e^{x^2} \cdot \sin x$ (b) $(1+x)y' = x^2 - 2y$

3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + xy = xe^{-x^2}, \quad y(0) = 1.$$

4. (*Zusatz*) Eine Kugel der Masse m wird im Ruhezustand in ein Gefäß mit einer zähen Flüssigkeit fallen gelassen und sinkt dort zu Boden. Durch die Flüssigeit erfährt sie zusätzlich zur Schwerkraft mg eine Reibungskraft $-kv$, wobei g die Erdbeschleunigung, k der Reibungskoeffizient und v die Sinkgeschwindigkeit der Kugel ist. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Kugel auf und bestimmen Sie die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$. Angenommen das Gefäß hätte keinen Boden, was wäre dann die Geschwindigkeit nach unendlicher Fallzeit?

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 15. Übung (14.07.-17.07.2015)

(Prüfungsvorbereitung)

Vorbereitungsaufgabe:
Schauen Sie sich die Übungsaufgaben und Themengebiete an. Welche Aufgaben sollten in der Übung gemeinsam gelöst werden?

Aufgaben zur Auswahl für die Übung:

1. (Regel von L'Hospital)
   Berechnen Sie folgende Grenzwerte: (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2e^{5x}-1\right)^{\frac{1}{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

2. (Extrema, Richtungsableitung, Tangentengleichung)
   Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=2x^2y-4x^2-\dfrac{1}{2}y^2$.
   (a) Ermitteln Sie alle stationären Punkte von f. Entscheiden Sie, welche davon lokale Minima bzw. Maxima und welche Sattelpunkte sind.
   (b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $(x^*,y^*)^T=(1,-1)^T$ zur Richtung $r=(-1,0)^T$.
   (c) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an f an der Stelle $(x^*,y^*)^T=(1,-1)^T$ an.

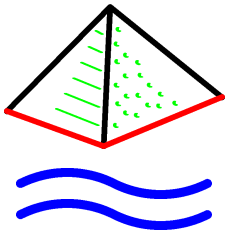
3. (Extrema unter NB)
   Der Ellipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ist dasjenige Rechteck mit achsenparallelen Seiten einzubeschreiben, dessen Flächeninhalt ein Maximum wird.

4. (Integralrechnung)
   Berechnen Sie die folgenden Integrale: (a) $\displaystyle\int_{-3}^{-1}\frac{\ln(-x)}{3x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}-x^2+1}{x}\,dx$

5. (Doppelintegral)
   Berechnen Sie das Doppelintegral $\displaystyle\int_{x=0}^{2}\int_{y=1-x}^{2} x\cdot e^{x+y}\,dy\,dx$ und skizzieren Sie den Integrationsbereich.

6. (Lineare DGL)
   Lösen Sie das Anfangswertproblem für $y=y(x)$ mit $x\in\mathbb{R},\ x>0$:
   $$xy'+y+e^{2x}=0,\quad y(1)=0.$$

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 2. Übung (14.-17.04.2015)

(Differentiationsregeln, Tangentengleichung)

Vorbereitungsaufgabe:

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x) = \sin x \cdot \ln x$ (b) $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos x}$ (c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Aufgaben für die Übung:

2. Bestimmen Sie die erste Ableitung $f'(x)$ der folgenden Funktionen $f(x)$:

   (a) $f(x) = 2x^3 - 7x^5 + 3t^2 - \dfrac{1}{2}x + 2$ (b) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}$

   (c) $f(x) = -\dfrac{6}{x^4} + \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{7}{\sqrt[4]{x^3}}$ (d) $f(x) = 3^x$

   (e) $f(x) = 4^{2x}$ (f) $f(x) = \ln(2x^3)$

   Geben Sie den Definitionsbereich von f und f' für (b) und (f) an.

3. Bestimmen Sie die erste Ableitung $f'(x)$ der folgenden Funktionen $f(x)$:

   (a) $f(x) = e^x \cdot (2x^3 - 4)$ (b) $f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^4$

   (c) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (d) $f(x) = \dfrac{\cos^2(3x)}{x^5}$

4. Bestimmen Sie die Tangentengleichung an den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$. Geben Sie damit einen Näherungswert für $\sqrt{4.1}$ an.

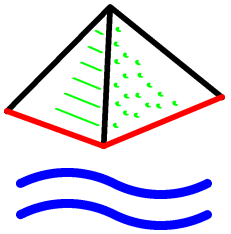
5. Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion $f^{-1}(y) = \operatorname{arsinh}(y)$ mit Hilfe ihrer Umkehrfunktion $y = f(x) = \sinh(x)$.
   Hinweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

6. *(Zusatz)* Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

   in $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 3. Übung (21.-24.04.2015)

(logarithmisches Ableiten, Regel von l'Hospital)

Vorbereitungsaufgabe:

1. (a) Wie lautet die Regel von l'Hospital und unter welchen Voraussetzungen darf diese angewendet werden?

   (b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(4x)}{e^x}$.

Aufgaben für die Übung:

2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die erste Ableitung der Funktion

$$F(x) = (4x^2 - 1)^{\sin x}.$$

3. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital:

   (a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 2x - e^{-x}}{x - \sin x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{-x} \cdot \ln x)$

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{e^{-x}}$ (e) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$

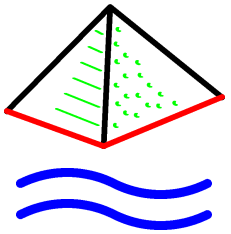
   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

4. Zeigen Sie, dass folgender Grenzwert nicht mit der Regel von l'Hospital bestimmt werden kann. Berechnen Sie den Grenzwert alternativ.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

5. *(Zusatz)* Die Verkaufszahlen eines Produktes (in Abhängigkeit der Zeit t) lassen sich beim Händler 1 durch die Funktion $f_1(t) = \sqrt{t}$ und beim Händler 2 durch die Funktion $f_2(t) = \ln(t+1)$ beschreiben. Vergleichen Sie das Wachstum für einen unendlichen Zeithorizont. Nutzen Sie dabei die Definitionen der Landau-Symbole.

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 4. Übung (27.-30.04.2015)

(Newton-Verfahren, Taylor-Entwicklung, Kurvendiskussion)

Vorbereitungsaufgabe:

1. Wiederholen Sie die Taylor-Entwicklung für differenzierbare Funktionen aus Lektion 5.

   (a) Wie lautet die allgemeine Formel für das Taylor-Polynom von f der Ordnung n zur Entwicklungsstelle x_0? Notieren Sie die Summanden bis zur Ordnung 3.

   (b) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen f' und f'' von $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Werten Sie die Funktion und die beiden Ableitungen an der Stelle $x_0 = 2$ aus.

Aufgaben für die Übung:

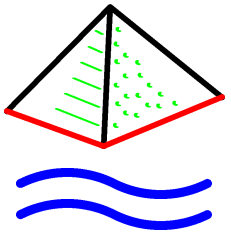
2. Bestimmen Sie näherungsweise mit dem Newton-Verfahren den Wert von $\sqrt{5}$ auf 6 Nachkommastellen. Ist jede Wahl des Startpunktes x_0 möglich?

3. Berechnen Sie für $f(x)$ das Taylor-Polynom der Ordnung n zur Entwicklungsstelle x_0:
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}, \quad x_0 = 2,\ n = 2$ (b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}, \quad x_0 = 0,\ n = 3$

4. Veranschaulichen Sie sich die Taylor-Polynome der Ordnung $n = 1, 3, 5$ für die Funktion $f(x) = \sin x$ zur Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

5. Führen Sie für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ eine vollständige Kurvendiskussion durch. Welche Eigenschaften können Sie bereits aus den Ableitungen in Aufg. 1(b) in der Umgebung von $x_0 = 2$ ableiten?

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 5. Übung (05.-08.05.2015)

(Kurvendiskussion, Marginalanalyse)

Vorbereitungsaufgabe:

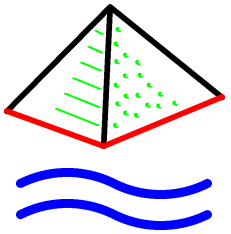
1. Gegeben sei eine Nachfrage-Preis-Funktion $x(p)$.
   (a) Was gibt der Wert der Grenzfunktion $Gx(p)$ an?
   (b) Definieren Sie die Preiselastizität der Nachfrage. Wie kann man den Zahlenwert interpretieren?
   (c) Wann spricht man von einer elastischen/unelastischen Nachfrage bezüglich des Preises?

Aufgaben für die Übung:

2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich, alle Achsenschnittpunkte, Lage und Art aller lokalen Extrema und Wendepunkte sowie das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches, und skizzieren Sie die Funktion:
$$f(x) = x \cdot (\ln x)^2.$$

3. Die Nachfrage-Preis-Funktion eine Gutes sei gegeben durch die Gleichung
$$x(p) = 10 \cdot \ln\left(\frac{120}{p}\right).$$
(p : Preis, x : Nachfrage)
   (a) Für welchen Preissektor ist diese Gleichung sinnvoll? Zeigen Sie, dass die Funktion monoton fallend ist.
   (b) Bei welchem Preis bewirkt die Erhöhung des Preises um 1 GE/ME einen Nachfragerückgang um 0.5 ME?
   (c) Für welchen Preis ist die Nachfrage elastisch/unelastisch bzgl. des Preises?
   (d) Bei welchem Preis bewirkt ein 2%iger Preisrückgang eine Nachfragesteigerung von 10%?
   (e) Die Umsatzfunktion in Abhängigkeit vom Preis ist gegeben durch $E(p) = p \cdot x(p)$. Zeigen Sie für die Elastizitätsfunktionen die allgemeingültige Beziehung
$$\epsilon_{E,p} = 1 + \epsilon_{x,p}.$$
   (f) Sinkt oder steigt der Umsatz bei Preiserhöhungen im Bereich elastischer Nachfrage für die fallende Nachfragefunktion $x(p)$?

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 6. Übung (12.-15.05.2015)

(Funktionen in mehreren Veränderlichen: Darstellung mit Höhenlinien, part. Ableitung, Gradient, Richtungsableitung)

Vorbereitungsaufgabe:

1. (a) Funktionen $z = f(x, y)$ in zwei Veränderlichen lassen sich z.B. mit Hilfe eines Höhenlinienbildes darstellen. Was versteht man unter einer Höhenlinie von f?

   (b) Welche geometrische Objekte stellen die folgenden Höhenlinien dar?

   (i) $x^2 + (y+2)^2 = 9$ $\quad$ (ii) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ $\quad$ (iii) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

   (c) Bilden Sie die partielle Ableitung $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ von der Funktion $f(x_1, x_2) = \ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$.

Aufgaben für die Übung:

2. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den Definitions- sowie Wertebereich, und stellen Sie die Funktionen mit Hilfe ihrer Höhenlinien grafisch dar:

   (a) $f(x, y) = x \cdot y$ $\quad$ (b) $f(x, y) = 3 + \sqrt{x - y}$

3. Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x_1, x_2) = \ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$

   (b) $g(s, t) = t^3 \cdot \cos\left(\dfrac{s}{t^2}\right)$

   (c) $h(x, y, z) = \sin(xy) - 3xy^2 + \ln x - yz + e^{-xyz^2}$

   (d) $w(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 x_3 - 2x_1 x_3 - 4x_3}$

4. Gegeben sei die Funktion

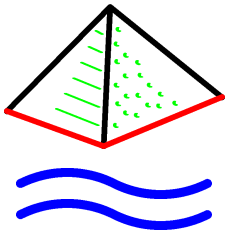
   $$f(x, y) = e^{-x^2-(y-1)^2}.$$

   (a) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von f an.

   (b) Stellen Sie f mit Hilfe von Höhenlinien dar.

   (c) Ermitteln Sie die Richtung des steilsten Anstieges in den Punkten $P_1 = (1, 1, f(1, 1))$ und $P_2 = (0, 1, f(0, 1))$ sowie die Richtungsableitungen zu den Richtungen $r_1 = (1, 2)^T$ und $r_2 = (0, 1)^T$ im Punkt P_1.

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 7. Übung (19.-22.05.2015)

(Tangentialebene, verallgemeinerte Kettenregel, Fehlerrechnung, Partialanalyse)

Vorbereitungsaufgabe:

1. (a) Betrachten Sie die beiden Kurven (Parametrisierung einer Kardioide)

$$\begin{aligned} x = x(t) &= 2\cos(t) - \cos(2t), \\ y = y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \end{aligned}$$

für $t \in [0, 2\pi)$. Bilden Sie jeweils die 1. Ableitung $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$ sowie $y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$.

(b) Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$. Bestimmen Sie die verkettete Funktion $F(t) := f(x(t), y(t))$.

(c) Bilden Sie die 1.Ableitung $F'(t) = \dfrac{dF}{dt}$.

(d) Wie wird die Ableitung $\dfrac{dF}{dt}$ mit der verallgemeinerten Kettenregel gebildet?

Aufgaben für die Übung:

2. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = e^{-x^2-(y-1)^2}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene für f im Punkt $P_1 = (1, 1, f(1, 1))$. Interpretieren Sie die Lage der Ebenen.

3. (a) Gegeben seien die Funktionen $f(x, y)$ sowie $x(t)$ und $y(t)$ aus Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Ableitung

$$\frac{dF}{dt} = \frac{df(x(t), y(t))}{dt}$$

mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel.

(b) Gegeben sei die Funktion $g(s, t) = s \cdot t$ mit

$$\begin{aligned} s = s(u, v) &= u^2 - v^2, \\ t = t(u, v) &= 2uv. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial g(s(u, v), t(u, v))}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial g(s(u, v), t(u, v))}{\partial v}.$$

4. Zwei Widerstände sind parallelgeschaltet. Für den Ersatzwiderstand gilt $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$. Man berechne den größtmöglichen absoluten und relativen Fehler des Ersatzwiderstandes, wenn $R_1 = (450 \pm 2)\Omega$ und $R_2 = (150 \pm 1)\Omega$ gemessen wurde.

5. Gegeben sei die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $y = y(A, K) = 5 \cdot A^{0.2} \cdot K^{0.8}$
(A: Arbeitsinput [in Mio. Arbeitnehmer], K: Kapitalinput [in Mio. Euro], y: Output [in Mio. Euro]).

   (a) Um welchen Betrag ändert sich der Output y, wenn bei gleichbleibenden Kapital von 3 Mio. Euro die Arbeitnehmerzahl von 9 Mio. auf 8 Mio. zurückgeht?

   (b) Zeigen Sie, dass jeweils der Exponent der Inputfaktoren die prozentuale Steigerung des Outputs angibt, wenn die eingesetzte Menge des jeweiligen Faktors um 1% erhöht wird.

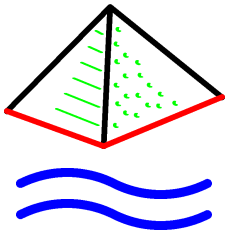
   (c) Um welchen Betrag ändert sich der Output y, wenn sich das Kapital von 6 Mio. Euro auf 6.5 Mio. Euro erhöht und die Arbeitnehmerzahl von 5 Mio. auf 4.9 Mio. abnimmt?

   (d) (*Zusatz*) Die jeweils verfügbaren Inputfaktoren seien nun zeitabhängige Größen, und es gelte

$$A = A(t) = 20 \cdot e^{-0.06t}$$
$$K = K(t) = 20 + 6t$$

   (t: Zeit [in Monaten], $t = 0$: Planungszeitpunkt 01.01.2015).
   Geben Sie den Output in Abhängigkeit von t an. Bestimmen Sie die Funktion, die die Outputänderung pro Monat zu jedem beliebigen Zeitpunkt t angibt. Zeigen Sie, dass am 01.01.2021 innerhalb eines Monats ein Outputrückgang um ca. 705000 Euro zu erwarten ist. Wieviele Arbeitnehmer und wieviel Kapital stehen zu diesem Zeitpunkt zur Verfügung?

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 8. Übung (26.-29.05.2015)

(Taylor-Entwicklung, Extrema)

Vorbereitungsaufgabe:

1. (a) Wiederholen Sie die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein lokales Minimum bzw. Maximum einer Funktion $g = g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   (b) Welche notwendige Bedingung gilt für eine Funktion in mehreren Veränderlichen

   $$f = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

   für ein Extremum?

   (c) Welche hinreichenden Bedingungen gelten für f für ein lokales Minimum, lokales Maximum bzw. Sattelpunkt?

   (d) Geben Sie den Gradient und die Hesse-Matrix der Funktion

   $$f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$$

   an.

Aufgaben für die Übung:

2. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung an der Stelle $(x^0, y^0) = (0, 1)$ für die Funktion $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$.

3. Bestimmen Sie Lage, Art und Wert aller lokalen Extrema der Funktion

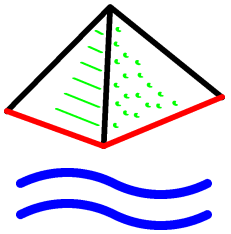
   $$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 3xy - 5x - 2y + 5.$$

4. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion $f(x, y) = x(1 - x)ye^{-y}$. Welche davon sind lokale Extrema, welche Sattelpunkte?

5. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$

6. Zusatz: Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$. Welche davon sind mit der hinreichenden Bedingung lokale Extrema?

Institut für Angewandte Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen
Hochschuldozentur Optimierung
Apl. Prof. Dr. Ursula Felgenhauer
Modul: **Mathematik W-2 (11117)**
(Betriebswirtschaftslehre/Wirtschaftsingenieurwesen Bachelor)
Sommersemester 2015



Aufgaben zur 9. Übung (02.-05.06.2015)

(Extrema unter einer Gleichungsbedingung)

Vorbereitungsaufgabe:

1. Gegeben sei eine Funktion $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, welche unter einer Gleichungsnebenbedingung $g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ minimiert bzw. maximiert werden soll.

   (a) Wie ist die zugehörige Lagrange-Funktion definiert?

   (b) Ohne Nebenbedingungen bestimmt man stationäre Punkte von f mit Hilfe der Gleichung $\nabla f(x) = 0$. Wie lauten die sogenannten Kuhn-Tucker-Bedingungen zur Berechnung von stationären Punkten unter Berücksichtigung der Gleichungsnebenbedingung?

   (c) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und die Kuhn-Tucker-Bedingungen für das Problem

   $$\max \quad f(x,y) = 2x^2 + y^2 \quad \text{bzgl.} \quad g(x,y) = x - y^2 + 1 = 0.$$

   (d) Ein Student kommt auf die Idee, die Nebenbedingung nach y^2 aufzulösen und in die Funktion $f(x, y)$ einzusetzen. Damit reduziert sich das Problem auf eine Funktion in einer Veränderlichen ohne Nebenbedingung. Welche Lösung erhält er?

Aufgaben für die Übung:

2. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x - y^2 + 1 = 0$.

3. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f(x, y) = 3x^2y$ unter der Nebenbedingung $4x^2 + 9y^2 = 36$.

4. Der Student Alois Huber muss unbedingt seinen Kenntnisstand in Mathematik verbessern, um die kommende Klausur erfolgreich bestehen zu können. Nun ist sein Wissensstand W (in Wissenseinheiten WE) eine Funktion von

   - der Anzahl t (in Tagen) der bis zur Prüfung aufgewendeten Lerntage *und*
   - der Menge m (in g) der von ihm konsumierten Wunderdroge.

   Der Zusammenhang kann beschrieben werden durch die Wissensstandfunktion $W(t, m)$ mit

   $$W(t,m) = 160 + 9t + 6m - 0.2t^2 - 0.25m^2, \quad t, m \geq 0.$$

   Jeder Lerntag kostet Alois 80€ (denn soviel könnte er andernfalls als Aushilfskraft verdienen), die Wunderdroge kostet pro Gramm 120€.

(a) Wie lange soll Alois lernen, und welche Dosierung der Wunderdroge soll er wählen, damit sein Wissensstand in Mathematik maximal wird?

(b) Wie soll Alois Lernzeit und Wunderdroge kombinieren, wenn er insgesamt 2680€ „opfern“ will?

(c) Vergleichen Sie in beiden Fällen die Höhe des maximalen Wissensstandes sowie die Kosten pro WE für neu erworbenes Wissen.

Vgl.: *Tietze, Übungsbuch, Aufgabe 7.53*