



1. Hausaufgabenblatt (16.04./23.04.2015)

Aufgabe H 1.1

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{array}{rrrrrr} x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens.

Aufgabe H 1.2

Mischungsproblem: Für eine Party sollen 10 Liter eines Mixgetränkes aus Fruchtsaft, Likör und Sekt hergestellt werden. Die Mischung soll mindestens 4 Liter Fruchtsaft, mindestens 1,5 Liter Likör, mindestens ein Drittel soviel Likör wie Fruchtsaft und mindestens ein Drittel soviel Sekt wie Fruchtsaft enthalten. Formulieren Sie ein lineares Optimierungsproblem für die kostengünstigste Mischung, wenn ein Liter Fruchtsaft 3€, ein Liter Likör 8€ und ein Liter Sekt 4€ kosten.

Aufgabe H 1.3

Produktionsplan: Ein Versandgeschäft für Campingartikel erhält ein günstiges Angebot über Hauszelte. Für den Kauf sind insgesamt höchstens 18000€ vorgesehen, wobei im Einkauf für ein Zelt von Modell A 60€ und für ein Zelt von Modell B 90€ zu veranschlagen sind. Es sollen von Modell A wenigstens ebensoviel und höchstens doppelt soviel Stück wie von Modell B gekauft werden. Das Versandgeschäft verkauft die Hauszelte zu Preisen von 70€ für Modell A und 130€ für Modell B an seine Kunden und will hierbei einen möglichst hohen Gewinn erzielen.

Formulieren Sie den beschriebenen Sachverhalt als lineares Optimierungsproblem.



2. Hausaufgabenblatt (23.04./30.04.2015)

Aufgabe H 2.1

Es sei die Menge

$$\mathcal{B} := \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - x_2 \geq -3, -x_1 + x_2 \leq 5, x_1 - x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

gegeben.

- (a) Stellen Sie $\mathcal{B}$ graphisch dar.
- (b) Ermitteln Sie alle Ecken von $\mathcal{B}$.
- (c) Betrachten Sie nun die linearen Optimierungsprobleme

$$\underset{x \in \mathcal{B}}{\text{Minimiere}} \quad z_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

bzw.

$$\underset{x \in \mathcal{B}}{\text{Maximiere}} \quad z_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

mit den Zielfunktionen

$$z_1 = x_1 - x_2, \quad z_2 = 2x_1 - x_2, \quad z_3 = x_1 - 2x_2 \quad \text{und} \quad z_4 = -3x_1 + x_2.$$

Für welche dieser linearen Optimierungsaufgaben ist z_i auf dem zulässigen Bereich $\mathcal{B}$ beschränkt bzw. nur nach oben beschränkt (also in Richtung des Gradienten der jeweiligen Zielfunktion) bzw. nur nach unten beschränkt (also in Richtung des negativen Gradienten der jeweiligen Zielfunktion)? Bestimmen Sie (falls möglich) das Maximum bzw. das Minimum der jeweiligen Aufgabe sowie **alle** Punkte, in denen dieser Zielfunktionswert angenommen wird.

Aufgabe H 2.2 (Vergleich H 1.2)

Mischungsproblem: Für eine Party sollen 10 Liter eines Mixgetränkes aus Fruchtsaft, Likör und Sekt hergestellt werden. Die Mischung soll mindestens 4 Liter Fruchtsaft, mindestens 1,5 Liter Likör, mindestens ein Drittel soviel Likör wie Fruchtsaft und mindestens ein Drittel soviel Sekt wie Fruchtsaft enthalten. Bestimmen Sie (graphisch) die kostengünstigste Mischung, wenn ein Liter Fruchtsaft 3 €, ein Liter Likör 8 € und ein Liter Sekt 4 € kosten.

Aufgabe H 2.3

Produktionsplan: Eine Metallwarenfabrik stellt zwei Ersatzteile A und B auf drei Automaten I, II und III her. Teil A durchläuft alle drei Automaten, während Teil B nur an den Automaten I und II bearbeitet wird. Die folgende Tabelle enthält Informationen, wieviele Minuten jeder Automat zur Bearbeitung eines Teiles benötigt:

	benötigte Zeit in Minuten je Stück Teil A	benötigte Zeit in Minuten je Stück Teil B	tägliche Gesamtzeit in Minuten
Automat I	3	6	360
Automat II	6	4	360
Automat III	6	0	300

Die Automaten I und II können täglich höchstens je 360 Minuten, Automat III täglich höchstens 300 Minuten eingesetzt werden. Der Erlös je Stück beträgt bei Modell A 5€ und bei dem Modell B 6€. Wieviele Stück sind von jedem Ersatzteil täglich herzustellen, damit der Gesamterlös möglichst hoch ist? Formulieren Sie den beschriebenen Sachverhalt als lineares Optimierungsproblem und lösen Sie die Aufgabe graphisch.



3. Hausaufgabenblatt (14.05./21.05.2015)

Aufgabe H 3.1

Bringen Sie die folgenden linearen Optimierungsaufgaben in die Normalform, und stellen Sie jeweils ein Simplex-Starttableau auf. Geben Sie die zugehörige Basislösung mit der Indexmenge der Basisvariablen an, und prüfen Sie diese auf Zulässigkeit. Ist die jeweilige Basislösung ausgeartet oder nichtausgeartet?

(a) Maximiere $x_1 + x_2$
u. d. N. $2x_1 - x_2 \leq 10,$
 $-x_1 + x_2 \leq 4,$
 $3x_1 - x_3 = 12,$
 $x_1, x_2 \geq 0,$
 $x_3 \leq 0.$

(b) Minimiere $x_1 + 2x_2$
u. d. N. $x_1 + x_2 \geq 5,$
 $-x_1 + 2x_2 \leq 11,$
 $x_1 + x_2 \leq 13,$
 $x_1 \geq 0.$

(c) Maximiere $-x_1 - 2x_2$
u. d. N. $-x_1 + x_2 \leq 0,$
 $x_1 + 4x_2 \leq 8,$
 $2x_1 - x_2 \leq 10,$
 $x_1 \leq 4,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

Aufgabe H 3.2

Gegeben sei die lineare Optimierungsaufgabe in Normalform

Minimiere $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4$
u. d. N. $2x_1 + x_2 + x_3 = 9,$
 $x_1 + 2x_2 + x_4 = 6,$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

Bestimmen Sie die jeweils zugehörige Basislösung der Aufgabe, wenn als Indexmenge der Basisvariablen

(a) $J = \{1, 4\}$ (b) $J = \{2, 4\}$ (c) $J = \{2, 1\}$

gewählt wird. Prüfen Sie jede dieser Basislösungen auf Zulässigkeit.

Aufgabe H 3.3

Gegeben sei ein lineares Optimierungsproblem in Normalform mit folgendem Simplex-Starttableau:

0	α	0	-3	β	γ	1	0
0	-2	1	2	0	1	-1	δ
κ	0	0	-1	1	2	1	3
1	λ	0	1	0	0	3	μ

Für welche Werte der Parameter im Tableau sind die folgenden Aussagen richtig?

- (a) Das zugehörige LOP liegt in kanonischer Form vor.
- (b) Die sich aus (a) ergebene Basislösung ist zulässig.
- (c) Die sich aus (a) ergebene Basislösung ist unzulässig.
- (d) Die sich aus (a) ergebene Basislösung ist zulässig und ausgeartet.



4. Hausaufgabenblatt (28.05./04.06.2015)

Aufgabe H 4.1

Lösen Sie die folgenden linearen Optimierungsprobleme mit Hilfe des Simplexalgorithmus. Geben Sie zu jeder der Aufgaben eine Lösung sowie den zugehörigen Zielfunktionswert an.

(a) Minimiere $-x_1 - 2x_2 - 4$
 u. d. N. $x_1 - 3x_2 \leq 0,$
 $x_1 \leq 3,$
 $x_1 + x_2 \leq 6,$
 $-x_1 + x_2 \leq 2,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

(b) Maximiere $-3x_1 + x_2$
 u. d. N. $3x_1 - x_2 \geq -3,$
 $-x_1 + x_2 \leq 5,$
 $x_1 - x_2 \leq 4,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

(c) Minimiere $-x_1 - 3x_2 + x_3$
 u. d. N. $-2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,$
 $-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq -3,$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Aufgabe H 4.2

Lösen Sie die lineare Optimierungsaufgabe

 Maximiere $x_1 + 2x_2 + \lambda x_3$
 u. d. N. $4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 10,$
 $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

unter Verwendung der Phase II des Simplexalgorithmus in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.



5. Hausaufgabenblatt (11.06./18.06.2015)

Aufgabe H 5.1

Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden linearen Optimierungsprobleme, insofern eine existiert. Verwenden Sie für eine erste zulässige Basislösung die Phase I des Simplexalgorithmus.

(a) Minimiere $-x_1 + 2x_2$
 u. d. N. $x_1 + x_2 = 1,$
 $x_1 - x_2 \geq 3/2,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

(b) Minimiere $2x_1 - x_2 - x_3$
 u. d. N. $x_1 - x_2 + x_3 \leq 4,$
 $4x_1 + 2x_2 \leq 6,$
 $x_1 + 3x_3 = 9,$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Aufgabe H 5.2

Bestimmen Sie eine erste zulässige Basislösung des folgenden linearen Optimierungsproblems:

 Minimiere $-x_1 - x_2$
 u. d. N. $x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
 $-x_1 + 2x_2 + x_3 = -1,$
 $3x_1 - 3x_2 - x_3 = 4,$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Was können Sie mit Hilfe von Phase I des Simplexalgorithmus über die Nebenbedingungen aussagen? Geben Sie an, ob diese Basislösung bereits optimal ist.

Aufgabe H 5.3

Gegeben sei die quadratische Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_1$.

- (a) Überprüfen Sie, ob die Funktion f auf dem $\mathbb{R}^3$ konvex bzw. strikt konvex ist.
- (b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f .
- (c) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Minimierer und Maximierer der Funktion f .



6. Hausaufgabenblatt (25.06./02.07.2015)

Aufgabe H 6.1

Geben Sie für das folgende Optimierungsproblem das zugehörige KKT-System an:

$$\begin{array}{ll}\text{Minimiere} & x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 \\ \text{u. d. N.} & \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 \geq 0. \end{array}\end{array}$$

Sind die Voraussetzungen erfüllt, dass die KKT-Bedingungen für diese Aufgabe notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen darstellen?

Aufgabe H 6.2

Geben Sie zu den folgenden linearen Optimierungsproblemen eine duale Aufgabe an:

$$\begin{array}{ll}\text{(a)} & \begin{array}{l} \text{Minimiere} \quad -x_1 + x_2 \\ \text{u. d. N.} \quad \begin{array}{l} x_2 + x_3 \leq -4, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_3 \leq 0. \end{array} \end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\text{(b)} & \begin{array}{l} \text{Maximiere} \quad 3x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{u. d. N.} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, \\ x_3 \leq 0. \end{array} \end{array}\end{array}$$

Aufgabe H 6.3

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem mit Hilfe des dualen Simplexalgorithmus.

$$\begin{array}{ll}\text{Minimiere} & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{u. d. N.} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 5x_2 \geq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}\end{array}$$

Aufgabe H 6.4

(a) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll}\text{Minimiere} & x_1 + 2x_2 \\ \text{u. d. N.} & \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}\end{array}$$

(b) Bestimmen Sie eine Lösung des um die Ungleichung $x_1 + 4x_2 \geq 2$ erweiterten LOP mit dem Ergebnis aus (a).



7. Hausaufgabenblatt (09.07./16.07.2015)

Aufgabe H 7.1

Von zwei Ausgangsorten A_1 und A_2 soll ein Produkt an die Bestimmungsorte B_1 , B_2 und B_3 geliefert werden. Die nachfolgend gegebene Datentabelle gibt die Kosten c_{ij} von A_i nach B_j , sowie die Vorratsmengen a_i und die Bedarfsmengen b_j an ($i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$).

c_{ij}	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	10	8	12	210
A_2	8	12	9	140
b_j	170	80	100	

- Geben Sie eine untere Schranke für den Minimalwert der Kosten des Transportproblems nach den Formeln (6.12) und (6.14) an. Berechnen Sie außerdem die Kostenmatrix $C^1 = (c_{ij}^1)$ gemäß (6.13), die statt $C = (c_{ij})$ zur Minimierung verwendet werden kann.
- Bestimmen Sie einen ersten Transportplan mit der Nordwesteckenregel.
- Finden Sie einen optimalen Transportplan. Geben Sie die zugehörigen Transportkosten an.

Aufgabe H 7.2

Gegeben sei folgendes Transportproblem mit einem ersten Transportplan

c_{ij}	1	2	3	4	5	a_i	x_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1	6	2	8	7	5	40	1	20	20				40
2	4	3	7	5	9	70	2		40		30		70
3	2	1	3	6	4	60	3	10		50			60
4	5	6	4	8	3	30	4				10	20	30
b_j	30	60	50	40	20		b_j	30	60	50	40	20	

$z(x) = 740$

Geben Sie mindestens zwei optimale Transportpläne an.

Aufgabe H 7.3 (Zuordnungsproblem)

Ein Veranstalter plant Benefizfußballspiele zugunsten der Erdbebenopfer in Nepal und hat dafür jeweils drei Traditionsvereine der deutschen Bundesliga und der spanischen Primera División gewinnen können. Aus Statistiken gehen folgende Beliebtheitsgrade c_{ij} der Zuschauer auf einer Skala von 1 (sehr beliebt) bis 3 (weniger beliebt) für die Ansetzungen hervor.

c_{ij}	Atletico M.	Barcelona	Real Madrid
Bayern	2	1	1
Dortmund	3	2	1
Schalke	3	2	2

Wie sollte der Veranstalter die Begegnungen ansetzen, damit die Stadien möglichst voll sind? Jede Mannschaft sollte dabei nur einmal spielen.