Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

## Vorlesungsankündigung für das Sommersemester 2016

# Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik, Physik und Informatik

### Wann und wo?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Vorlesung | : | Mo | 07:30 Uhr bis 09:00 Uhr | im HG, Raum 2.45 | (Beginn: 04. April 2016) |
| | | Di | 07:30 Uhr bis 09:00 Uhr | im HG, Raum 2.45 | |
| Übung | : | Fr | 07:30 Uhr bis 09:00 Uhr | im HG, Raum 2.45 | |

### Wieviel?

| | | |
|---|---|---|
| Kreditpunkte | : | 8 |
| Selbststudium | : | 180 Stunden (einschließlich Prüfungsvorbereitung) |
| Prünfungsleistungen | : | erfolgreich bearbeitete Hausaufgaben (unbenotet) |
| | | und mündliche Prüfung (benotet) |
| Vorwissen | : | Grundvorlesungen zur Analysis und linearen Algebra |
| | | Grundvorlesung zur numerischen Mathematik |

### Warum lohnt sich die Teilnahme?

Die Ausrichtung des Mathematikstudiums an der BTU Cottbus-Senftenberg hinsichtlich der Vertiefung in angewandter Mathematik auf die Richtungen Optimierung und Statistik legt flüchtig betrachtet die Vermutung nahe, dass dieses Modul inhaltlich nicht so recht zu diesen beiden Spezialisierungsrichtungen „paßt“, zumal es auch kaum noch weitergehende Lehrangebote in diesem interessanten Teilgebiet der numerischen Mathematik gibt. Die Teilnahme an dieser Veranstaltung lohnt sich aber für Studierende der Mathematik trotzdem, denn die hier behandelten Probleme und ihre Lösungsmethoden sind auch in vielen Fragestellungen der (nichtlinearen) Optimierung und Statistik hilfreiche Werkzeuge, werden in den entsprechenden Vorlesungen aber kaum behandelt. Die hier vorgestellten Probleme und Methoden finden allgemeiner in vielen Gebieten der angewandeten Mathematik Verwendung. Oft dürften die weiter unten noch genauer beschriebenen Problemstellungen dieser Vorlesung vielen erst später (z.B. in der Bachelor-/Masterarbeit oder im Berufsleben) begegnen, wo dann aber die Zeit fehlt, sich intensiv damit zu beschäftigen. Eine Auseinandersetzung mit den Thema Interpolation und Approximation während des Studiums sollte sich deshalb auszahlen. Dies kann auch für Studierende der Physik und Informatik interessant sein, die in ihren Fachgebieten ähnliche Fragestellungen vorfinden können.

### Ansprechpartner:


| | | |
|---|---|---|
| Prof. Dr. Ludwig Cromme | : | HG Raum 4.03, Tel.: (0355) 69-2777, E-Mail: cromme@b-tu.de |
| Jens Kunath | : | HG Raum 4.49, Tel.: (0355) 69-2409, E-Mail: jens.kunath@b-tu.de |


### Internetseite zur Vorlesung:

`http://vieta.math.tu-cottbus.de/~kunath/SoSe2016/InterpApprox/interpApprox.php`

## Welche Probleme werden behandelt?

Ein in der Praxis häufig auftretendes Problem: Von einer unbekannten Funktion $f$ sind nur $m \in \mathbb{N}$ Werte $\big(x_i, f(x_i)\big)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, gegeben. Dies können zum Beispiel Messwerte von physikalischen Experimenten oder medizinischen Versuchen zu bestimmten Zeitpunkten sein. In der Regel sind die Werte $f(x_i)$ mit Fehlern behaftet (Messfehler, Rundungsfehler). Um zwischen den Punkten $x_i$ Aussagen über die unbekannte Funktion $f$ zu erhalten oder um Prognosen für $x > x_m$ zu erhalten, wird man die Wertepaare $\big(x_i, f(x_i)\big)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, durch eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}$ mit $x_1, \ldots, x_m \in G$ definierte, stetige oder glatte Funktion approximieren, die in den Punkten $x_i$ „gut" mit den $f(x_i)$ übereinstimmt.

Aus mathematischer Sicht führt dies auf ein diskretes Approximationsproblem: Gesucht ist ein $p \in \mathcal{F}$, so dass der Vektor $P := \big(p(x_1), \ldots, p(x_m)\big)^T$ vom Datenvektor $F := \big(f(x_1), \ldots, f(x_m)\big)^T$ in einer Norm $\| \cdot \|$ auf dem $\mathbb{R}^m$ möglichst wenig abweicht, d.h. $\|P - F\|$ ist zu minimieren. Dabei ist $\mathcal{F}$ eine geeignete Funktionenfamilie, d.h. eine Teilmenge aller auf $G$ definierten Funktionen. Welche Funktionenfamilie und welche Norm zur Lösung gewählt wird, hängt vom Problem bzw. dem Hintergrund der Anwendung ab.

Liegt den Messwerten aus einem Experiment ein bekanntes Modell zugrunde, dann kann dadurch die Wahl von $\mathcal{F}$ bereits festgelegt sein. Ist zum Beispiel aus physikalischen Gesetzmäßigkeiten bekannt, dass die $\big(x_i, f(x_i)\big)$ einem Polynom genügen, dann liegt es auf der Hand, für $\mathcal{F}$ die Menge der Polynome zu wählen. Die Polynomkoeffizienten nennt man dann auch die Parameter des Modells und deshalb spricht man bei der Lösung des zugehörigen Approximationsproblems auch von Parameteridentifizierung.

Schwieriger wird es, wenn keine konkrete Modellfunktion bekannt ist, was vor allem in der Forschung häufig auftritt, deren zentrale Fragestellung oft die Suche nach funktionalen Zusammenhängen zwischen zwei oder mehreren Größen ist. Dabei gilt der Grundsatz: Die Wahl von $\mathcal{F}$ erfordert neben einer möglichst genauen Reproduktion der Werte $f(x_i)$ auch die Wiedergabe charakteristischer, durch die Messwerte nahegelegter Eigenschaften, wie zum Beispiel Monotonie, Krümmungsverhalten oder Differenzierbarkeit.

In der Vorlesung werden verschiedene Methoden zur Lösung diskreter Approximationsprobleme vorgestellt, wie zum Beispiel: Polynominterpolation, Hermite-Interpolation, rationale Interpolation, Approximation in euklidischen Räumen, diskrete lineare Tschebyscheff-Approximation, Spline-Interpolation...

Seltener steht man in der Praxis vor dem Problem, eine gegebene stetige Funktion $f$ zu approximieren (stetige Approximationsprobleme). Auch dieses Problem findet seine Anwendung, zum Beispiel die Darstellung nichtelementarer Funktionen in Computern. Die Problemformulierung und deren Lösung hängt auch von der zugrunde liegenden Funktionenfamilie $\mathcal{F}$ und der gewählten Norm ab. In der Vorlesung werden im Zusammenhang mit stetigen Approximationsproblemen unter anderem behandelt: Approximation in euklidischen Räumen, Approximation mit trigonometrischen Polynomen, Tschebyscheff-Systeme / Haarsche Systeme, Remes-Algorithmus, Approximation mit Splines (mit festen Knoten), ...

Neben den genannten Lösungsverfahren wird natürlich auch auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eingegangen. Weiter werden Aussagen zum Approximationsfehler hergeleitet. In Übungs- und Hausaufgaben können die Teilnehmer die vorgestellten Verfahren selbst anwenden. Dies beschränkt sich nicht nur auf das Rechnen mit Zettel und Stift, sondern wird durch kleinere Programmieraufgaben (mit Matlab / Octave) sehr anschaulich durchgeführt.

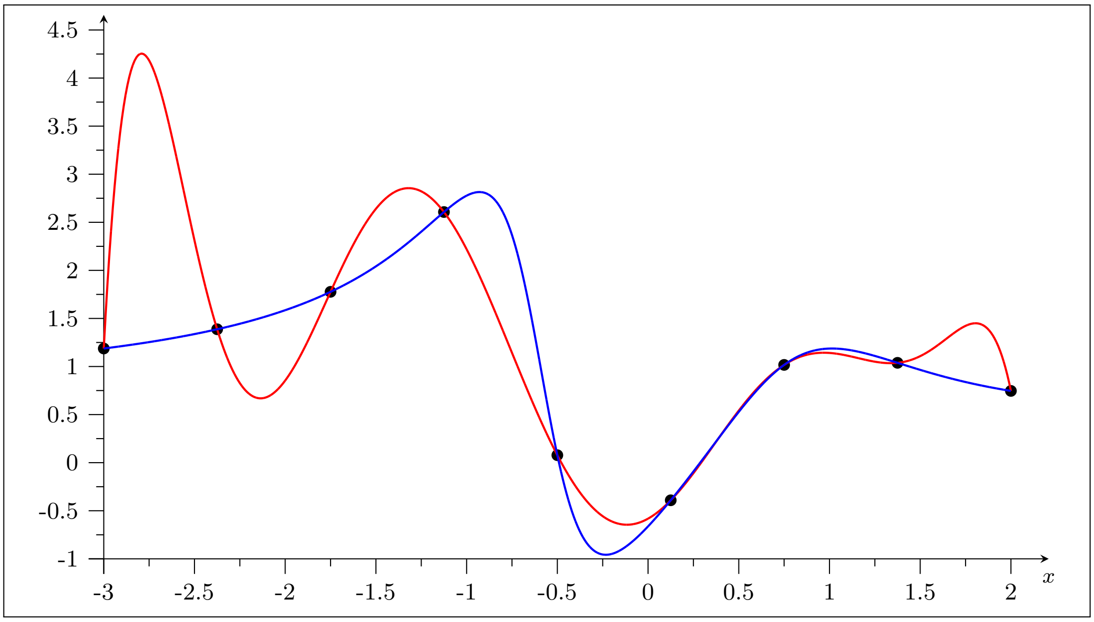


**Abb. 1:** Interpolationspolynom und rationale Interpolation zu den Daten $\big(x_i, f(x_i)\big)$ $\bullet$.

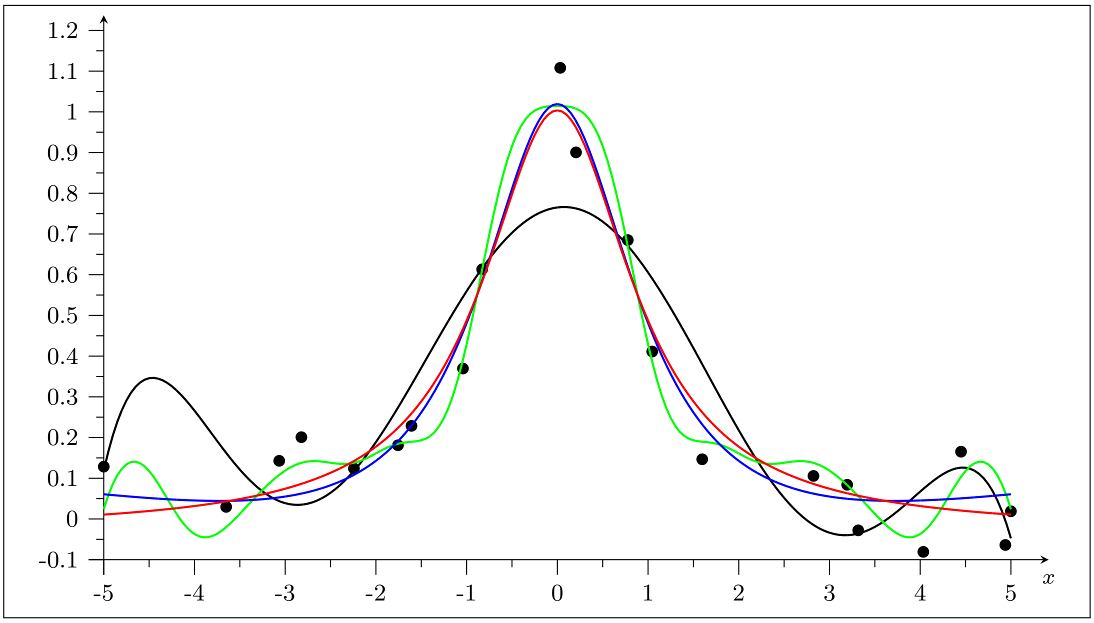


**Abb. 2:** $L_2$-Approximation von diskreten Daten $\big(x_i, f(x_i)\big)$ $\bullet$ durch Funktionen $p$ aus verschiedenen Funktionenfamilien $\mathcal{F}$:

$p \in \mathcal{F} := \operatorname{span}\big(1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\big)$

$p \in \mathcal{F} := \operatorname{span}\big(1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \cos(4x), \cos(5x), \cos(6x), x^2, x^4, x^6\big)$

$p \in \mathcal{F} := \operatorname{span}\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)$

$p \in \mathcal{F} := \operatorname{span}\left(1, \dfrac{1}{x^2+1}\right)$

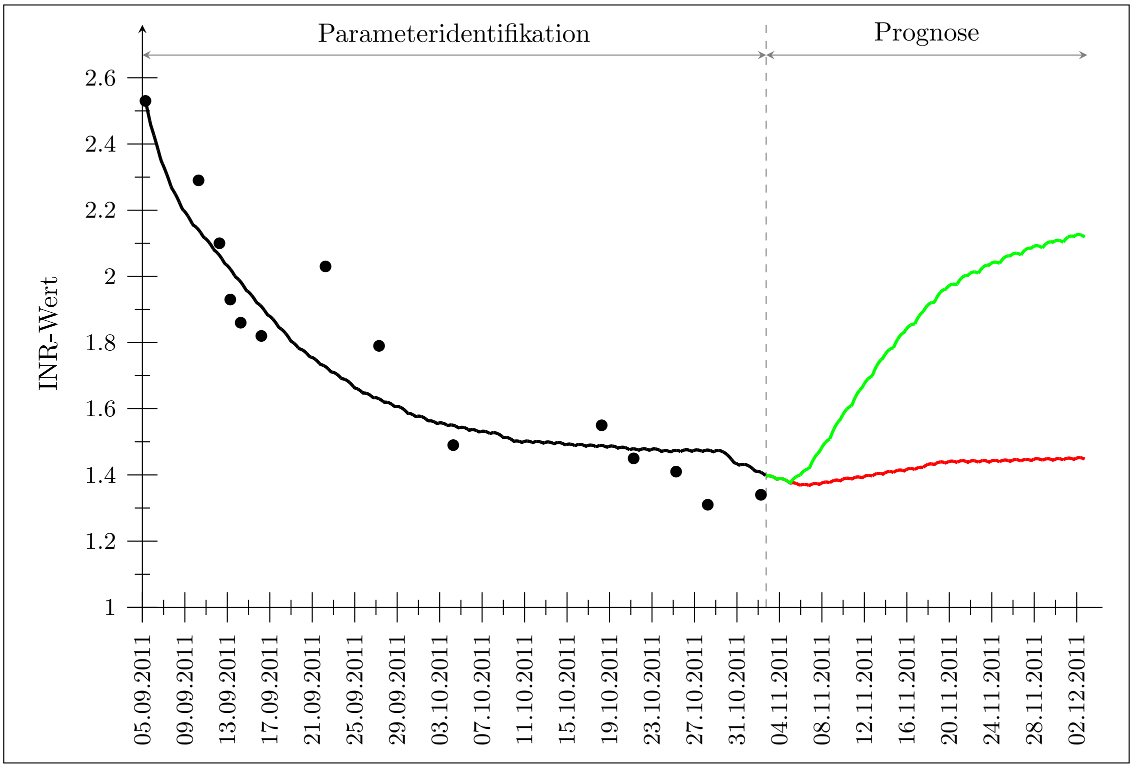


**Abb. 3:** $L_2$-Approximation in einer medizinischen Anwendung: Die $L_2$-Approximation ——— der INR-Messwerte • dient zur Parameteridentifikation der zugrundeliegenden Modellfunktion. Mit Hilfe der ermittelten Parameter kann eine Prognose für die zukünftige Entwicklung des INR-Wertes berechnet werden. Die Prognose kann dabei unter gleich bleibenden Rahmenbedingungen (Kurve ———) oder auch für geänderte, die Modellparameter nicht beeinflussende Rahmenbedigungen (Kurve ———) berechnet werden. Auf Basis dieser Prognoserechnungen lassen sich Therapieempfehlungen für Patienten herleiten.

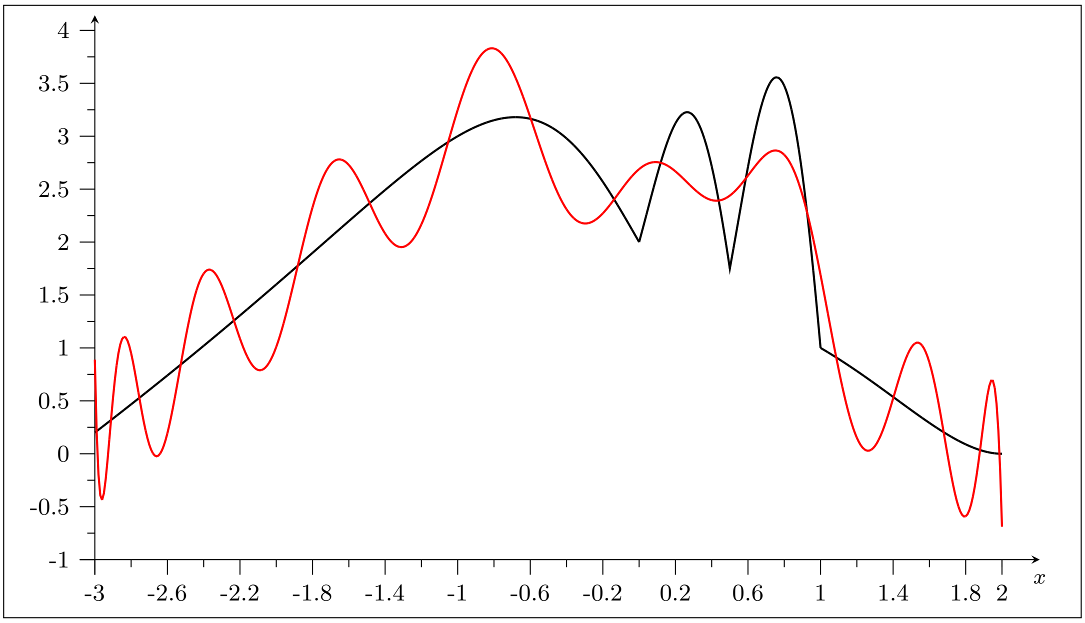


**Abb. 4:** Mit dem Remes-Algorithmus berechnete beste Tschebbyscheff-Approximation ——— aus $\mathbb{P}_{18} := \operatorname{span}\bigl(1, x, x^2, \ldots, x^{18}\bigr)$ im Intervall $[-3, 2]$ an die Funktion ———.