Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2016

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 2 - Abgabe bis Mittwoch, 20. April 2016, 12 Uhr im HG, Raum 4.49

Für die Lösung einiger Hausaufgaben sind Programmierkenntnisse mit Matlab oder Octave erforderlich. Die nachfolgenden Aufgaben sollen Sie ein wenig darauf vorbereiten bzw. Programmierkenntnisse auffrischen. Falls Sie noch nie bzw. selten mit Matlab gearbeitet haben, dann finden Sie auf der Internetseite zur Lehrveranstaltung einige Hinweise zur Arbeit mit Matlab bzw. einige Links zu weiteren Matlab-Einführungen. Octave ist zu Matlab weitgehend ähnlich. Die Lösungen, d.h. in diesem Fall auch die mit kurzen Kommentaren versehenen Matlab-Quelltexte, senden Sie bitte bis spätestens zum oben genannten Abgabetermin per E-Mail an jens.kunath@b-tu.de.

Aufgabe H2.1 (10 Punkte)

(a) Lösen Sie mit Hilfe von Matlab das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 28 & 4 & 70 & 68 & 55 & 84 & 57 & 9 & 9 & 63 & 34 & 36 & 37 & 38 & 23 \\ 55 & 85 & 32 & 66 & 14 & 59 & 47 & 23 & 40 & 36 & 91 & 83 & 63 & 82 & 18 \\ 96 & 94 & 96 & 17 & 15 & 55 & 2 & 92 & 26 & 52 & 37 & 2 & 79 & 54 & 23 \\ 97 & 68 & 4 & 12 & 26 & 92 & 34 & 16 & 81 & 41 & 12 & 5 & 9 & 36 & 44 \\ 16 & 76 & 44 & 50 & 85 & 29 & 17 & 83 & 44 & 8 & 79 & 17 & 93 & 94 & 32 \\ 98 & 75 & 39 & 96 & 26 & 76 & 80 & 54 & 92 & 24 & 39 & 65 & 78 & 88 & 93 \\ 96 & 40 & 77 & 35 & 82 & 76 & 32 & 100 & 19 & 13 & 25 & 74 & 49 & 56 & 44 \\ 49 & 66 & 80 & 59 & 25 & 39 & 53 & 8 & 27 & 19 & 41 & 65 & 44 & 63 & 19 \\ 81 & 18 & 19 & 23 & 93 & 57 & 17 & 45 & 15 & 24 & 10 & 46 & 45 & 59 & 91 \\ 15 & 71 & 49 & 76 & 35 & 8 & 61 & 11 & 14 & 42 & 14 & 55 & 31 & 21 & 98 \\ 43 & 4 & 45 & 26 & 20 & 6 & 27 & 97 & 87 & 5 & 95 & 30 & 51 & 31 & 44 \\ 92 & 28 & 65 & 51 & 26 & 54 & 66 & 1 & 58 & 91 & 96 & 75 & 52 & 48 & 12 \\ 80 & 5 & 71 & 70 & 62 & 78 & 69 & 78 & 55 & 95 & 58 & 19 & 82 & 24 & 26 \\ 96 & 10 & 76 & 90 & 48 & 94 & 75 & 82 & 15 & 50 & 6 & 69 & 80 & 85 & 41 \\ 66 & 83 & 28 & 96 & 36 & 13 & 46 & 87 & 86 & 49 & 24 & 19 & 65 & 20 & 60 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3556 \\ 4567 \\ 3825 \\ 3265 \\ 4534 \\ 5341 \\ 4351 \\ 3642 \\ 3552 \\ 2939 \\ 3006 \\ 4660 \\ 4745 \\ 4912 \\ 3904 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Matrix A und den Vektor b senden wir Ihnen als Excel-Tabelle zu. Schreiben Sie zur Abgabe neben der Lösung auch die Eingaben auf, mit der Sie die Lösung erhalten haben.

(b) Stellen Sie die drei Funktionen

$$f(x) \;:=\; \frac{\cos(2\pi x)}{\exp\big(\sin(x)\big)+1} \quad , \quad g(x) \;:=\; \sqrt{\Big|\cos\big(\sin(x^2+3x+1)\big)\Big| + \frac{1}{x^2+1}}$$

und

$$h(x) \;:=\; \arccos\left(\frac{1}{2}\cdot f(x)\cdot g(x)\right)^{\exp\big(f(x)+g(x)\big)} - 1$$

im Intervall $[-5, 5]$ in einer *gemeinsamen* Grafik dar. Die Funktionen sollen dabei durch verschiedene Farben und durch eine Legende unterscheidbar sein. Drucken Sie zur Abgabe die Grafik aus und schreiben auch die Eingaben auf, mit der Sie die Grafik erhalten haben. Lösungen, die die Symbolic-Toolbox verwenden, werden *nicht* akzeptiert!

(c) Gegeben sei folgende Zitat des polnischen Satirikers Stanislaw Jerzy Lec (1909 - 1966):

`Ich stimme mit der Mathematik nicht überein. Ich meine,`
`dass die Summe von Nullen eine gefährliche Zahl ist.`

Nutzen Sie die Möglichkeit der logischen Indizierung in Matlab, um im gegebenen Zitat die Anzahl folgender Zeichen zu bestimmen:

(i) Leerzeichen (wobei obiger Zeilenumbruch als Leerzeichen gilt)

(ii) `e`

Ersetzen Sie im Fall (i) die Leerzeichen durch das Zeichen `|` und im Fall (ii) an den gefundenen Stellen Klein- durch Großbuchstaben. Schreiben Sie zur Abgabe neben den gefundenen Anzahlen und dem angepaßten Zitattext auch die Eingaben auf, mit der Sie die Lösung erhalten haben. *Hinweis: Nutzen Sie die Matlab-Funktion `strfind.m`. Lösungen, die `for`- oder `while`-Schleifen verwenden, werden nicht akzeptiert!*

Aufgabe H2.2 (4 Punkte)
Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `ggT.m` zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$. Außer dem $\mathrm{ggT}(a, b)$ soll die Funktion zusätzlich die eindeutig bestimmten Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ ausgeben, für die gilt: $\mathrm{ggT}(a, b) = sa + tb$. Zur Erinnerung: Es gilt $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ genau dann, wenn $d \big| a$ und $d \big| b$ und für alle anderen Teiler $c \in \mathbb{Z}$ von a und b folgt $c \big| d$.

Aufgabe H2.3 (3 Punkte)
Zwei natürliche Zahlen a und b heißen teilerfremd, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ gilt. Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `istTeilerfremd.m`, die überprüft, ob $r \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ Zahlen $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{Z}$ paarweise teilerfremd sind. Wenn dies der Fall ist, dann soll die Funktion den Wert 1 zurückgeben, andernfalls den Wert 0. Die Funktion soll außerdem ggf. das erste Paar (x_i, x_j) zurückgeben, dass nicht teilerfremd ist.

Aufgabe H2.4 (6 Punkte)
Haben $x, y \in \mathbb{Z}$ bei Division mit einem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ den gleichen Rest, dann sagt man auch, dass x kongruent y modulo n ist, in Zeichen $x \equiv y (\mathrm{mod}\ n)$. Der <u>chinesische Restsatz</u> besagt, dass für $r \geq 2$ paarweise teilerfremde Zahlen $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und beliebige $x_1 \in \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}$, ... , $x_r \in \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$ genau eine Zahl $x \in \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ existiert, für die $x \equiv x_1 (\mathrm{mod}\ m_1)$, ... , $x \equiv x_r (\mathrm{mod}\ m_r)$ gilt, wobei $M := m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r$.

(a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `chinRestsatz.m`, die zu beliebigen Eingaben $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x_1 \in \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}$, ... , $x_r \in \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$ die Voraussetzungen des chinesischen Restsatzes überprüft. Sind diese nicht erfüllt, dann soll die Funktion den Wert `NaN` zurückgebenen. Sind die Voraussetzungen erfüllt, dann soll die Funktion die simultanen Kongruenzen $x \equiv x_1 (\mathrm{mod}\ m_1)$, ... , $x \equiv x_r (\mathrm{mod}\ m_r)$ lösen; Rückgabewert der Funktion ist dann entsprechend die Lösung x. Verwenden Sie dabei die in den Aufgaben 1 und 2 programmierten Matlab-Funktionen.

(b) Verwenden Sie Ihre Funktion `chinRestsatz.m` zur Lösung der folgenden Aufgabe: Vor einer Schlacht lässt ein General seine Soldaten nacheinander in Reihen von je 5,6,7 und 11 aufstellen. Dabei bleiben drei Soldaten übrig, wenn sie sich in Fünferreihen aufstellen, vier bleiben übrig bei Aufstellung in Siebenerreihen und fünf Soldaten bleiben übrig, wenn sie sich in Elferreihen aufstellen. Dagegen bleibt keiner übrig, wenn sie sich in Sechserreihen aufstellen. Es waren 2000 Bauern zwangsrekrutiert worden. Wieviele waren schlau genau, sich vor der Schlacht heimlich aus dem Staub zu machen?

(c) Testen Sie Ihre Funktion außerdem an den Datensätzen `chinRest1.csv` und `chinRest2.csv`. In der ersten Spalte der beiden Matrizen stehen jeweils die Werte $x_1, \dots, x_r$, in der zweiten Spalte die Werte $m_1, \dots, m_r$.