Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2016

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 3 - Abgabe bis Mittwoch, 27. April 2016, 12 Uhr im HG, Raum 4.49

Aufgabe H3.1 (10 Punkte)

Von der Funktion $f(x)$ seien die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte an den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_4$ bekannt:

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	3
$f(x_i)$	11	1	1	5	121

Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_4 x^4$ vom maximalen Grad 4

(a) durch Lösung eines linearen Gleichungssystems

(b) nach der Lagrange-Darstellung $p(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i) L_i(x)$ mit den Lagrange-Polynomen $L_0, \ldots, L_4$

(c) nach der Methode von Newton.

Hinweis: Die maximal mögliche Punktzahl gibt es nur für Lösungen mit vollständigen Zwischenschritten, die bei den jeweils geforderten Methode allgemein zu erwarten sind. Lösungen durch „Hinsehen“ mit mehr oder weniger geeigneten Begründungen werden nicht bewertet!

Aufgabe H3.2 (7 Punkte)

Interpolieren Sie die folgenden Daten $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ nach der Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms, und stellen Sie das Interpolationspolynom in der Form $p_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ dar:

(a)

i	0	1	2	3	4
x_i	-3	-1	0	2	4
f_i	-103	-3	2	12	142

(b)

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-4	-2	0	1	3	4	5
f_i	5858	108	-2	-12	118	1722	8648

Aufgabe H3.3 (8 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \exp(x^2)$ soll im Intervall $[-1, 1]$ durch ein quadratisches Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit drei Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ interpoliert werden.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ von p.

(b) Schätzen Sie den Interpolationsfehler $\|f-p\|_{\infty,[-1,1]}$ ab. Verwenden Sie dazu die in der Vorlesung diskutierte Fehlerabschätzung für das Interpolationspolynom p vom Grad n. Schätzen Sie dabei die Maximumnormen so genau wie möglich ab.

(c) Berechnen Sie den Interpolationsfehler $\|f-p\|_{\infty,[-1,1]}$ näherungsweise numerisch (z.B. mit Hilfe von Matlab). Vergleichen Sie mit (b).

Aufgabe H3.4 (8 Punkte)

Seien $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebig gewählte Zahlen. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Vandermonde-Matrix

$$V(x_0,\ldots,x_n) \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} .$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Determinante

$$\det\big(V(x_0,\ldots,x_n)\big) \quad = \quad \prod_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

besitzt. Begründen Sie, warum sich damit zeigen läßt, dass die Interpolationsaufgabe $p(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ mit $(n+1)$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ immer eindeutig lösbar ist. (*Hinweis: In Abhängigkeit von der Wahl Rechenschritte kann die Verwendung von*

$$x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1}) \quad , \quad x, y \in \mathbb{R} \; , \quad k \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

erforderlich sein. Es gibt aber auch Berechnungsmöglichkeiten, bei denen die Verwendung von $(*)$ *nicht notwendig wird.*)