Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2016

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 4 - Abgabe bis Mittwoch, 11. Mai 2016, 12 Uhr im HG, Raum 4.49

Aufgabe H4.1 (20 Punkte)

Die Polynominterpolation liefert oft eine hervorragende Approximationsgüte, kann aber besonders im Falle äquidistanter Stützstellen und großer Stützstellenanzahl auch stark oszillieren. Dieser Nachteil kann durch geeignete Stützstellenwahl teilweise aufgehoben werden.

Gegeben seien die Funktionen $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ und $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{1}{1+9x^2} \quad , \quad g(x) := |x| \quad \text{und} \quad h(x) := \frac{\ln(5x+10)}{\sqrt{25x^2+1}}$$

Verwenden Sie die rechnerischen und graphischen Möglichkeiten von Matlab, um die folgenden Aufgaben zu bearbeiten:

(a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, die zu $n+1$ Vorgaben (x_i, p_i), $i = 0, 1, \dots, n$ das Interpolationspolynom p (z.B. nach Lagrange) aufstellt und in beliebigen $x \in [x_0, x_n]$ auswertet. Führen Sie für die Funktionen f, g und h jeweils Polynominterpolation mit $n+1$ äquidistanten Stützstellen für $n = 5, 10, 15$ durch, wobei jeweils $x_0 := -1$ und $x_n := 1$ gelte. Stellen Sie die Interpolierenden jeweils gemeinsam mit der Funktion f, g bzw. h im Intervall $[-1, 1]$ graphisch dar.

(b) Wählen Sie für $n = 5, 10, 15$ die Tschebyscheff-Nullstellen $x_k := -\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)$, $i = 0, 1, \dots, n$ des $(n+1)$-ten Tschebyscheff-Polynoms, und interpolieren Sie damit die Funktionen f, g und h. Beachten Sie dabei, dass die Stützstellen x_0 und x_n nicht mit den Intervallgrenzen von $[-1, 1]$ zusammenfallen. Stellen Sie die Interpolierenden jeweils gemeinsam mit der Funktion f, g bzw. h im Intervall $[-1, 1]$ graphisch dar.

(c) Da die Lagrange-Polynome L_j eine Zerlegung der Eins bilden, kann das Interpolationspolynom p auch in der baryzentrischen Darstellung

$$p(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{x - x_j} f_j}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{x - x_j}} \quad \text{mit den baryzentrischen Gewichten} \quad b_j := \left(\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)\right)^{-1}$$

geschrieben werden.

Erstellen Sie eine Matlab-Funktion zur Berechnung der baryzentrischen Koordinaten $b_0, \dots, b_n$ bei gegebenen Stützstellen $x_0, \dots, x_n$. Berechnen Sie in den Fällen $n = 5, 10, 15$ die baryzentrischen Koordinaten für äquidistante Stützstellen aus (a) und für die Tschebyscheff-Stützstellen aus (b). Stellen Sie diese in den Fällen $n = 5, 10, 15$ jeweils in einer gemeinsamen Grafik mit geeignetem Maßstab dar.

(d) Stellen Sie das Knotenpolynom $\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ im Falle von $n = 10$

- für äquidistante Stützstellen aus (a),

- für die Tschebyscheff-Stützstellen aus (b) und
- für die Stützstellen $x_k = \left(\frac{2k}{n} - 1\right)^3$, $i = 0, 1, \ldots, n$

in einem geeigneten Maßstab grafisch dar, und diskutieren Sie deren betragsmäßige Maxima.

(e) Diskutieren Sie die Stabilität der Interpolationsprobleme aus (a) im Falle $n = 10$ für die Funktionen f, g und h experimentell, indem Sie die in der Stützstelle $x = 0$ vorgeschriebenen Funktionswerte um 10^{-k} für $k = 1, 2, 3$ nach unten bzw. nach oben abändern. Stellen Sie die Interpolationsergebnisse für f, g, und h in jeweils einer Grafik dar.

Hinweise:

- Bei (a) genügt es, wenn die Funktion die Funktionswerte des Interpolationspolynoms p ausgibt. Die Funktion muss p nicht als Formel ausgeben. Verzichten Sie auf die Verwendung der Symbolic-Toolbox!
- Die Matlab-Quelltexte, numerische Ergebnisse und Grafiken geben Sie bitte bis zum oben genannten Termin in **ausgedruckter** Form ab (wie üblich in der Vorlesung zum o.g. Termin). Ihren Ausdruck dürfen Sie gerne zusätzlich mit handschriftlichen Kommentaren ergänzen. Zusätzlich senden Sie die Quelltexte bitte bis zum o.g. Abgabetermin auch per E-Mail an `jens.kunath@tu-cottbus.de`.