Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2016

Geben Sie Ihren Namen und Matr.-Nr. auf Ihrer Lösung an und heften Sie alle Blätter zusammen!

Übungsblatt 5 - Abgabe bis Dienstag, 17. Mai 2016 vor der Vorlesung

Aufgabe H5.1 (6 Punkte)

Seien $(x_i, f_i) \in \mathbb{R}^2$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ gegeben. Die dividierte Differenz $\Delta_f^{k-j}(x_j, \ldots, x_k)$ wird rekursiv definiert durch

$$\Delta_f^0(x_i) \;:=\; f_i\;, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

und

$$\Delta_f^{k-j}(x_j, \ldots, x_k) \;:=\; \frac{\Delta_f^{k-j-1}(x_{j+1}, \ldots, x_k) - \Delta_f^{k-j-1}(x_j, \ldots, x_{k-1})}{x_k - x_j}\;, \quad 0 \le j \le k \le n\;.$$

Wird $k := j + s$ mit $1 \le s \le n - j$ gesetzt, dann erhält man

$$\Delta_f^s(x_j, \ldots, x_{j+s}) \;=\; \frac{\Delta_f^{s-1}(x_{j+1}, \ldots, x_{j+s}) - \Delta_f^{s-1}(x_j, \ldots, x_{j+s-1})}{x_{j+s} - x_j}\;.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende explizite Berechnungsformel der dividierten Differenzen:

$$\Delta_f^s(x_j, \ldots, x_{j+s}) \;=\; \sum_{i=j}^{j+s} \frac{f_i}{\prod\limits_{\substack{m=j\\ m\neq i}}^{j+s} (x_i - x_m)}\;, \quad 1 \le s \le n - j\;,\;\; 0 \le j \le n\;.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Differenz $\Delta_f^s(x_{j+1}, \ldots, x_{j+s+1}) - \Delta_f^s(x_j, \ldots, x_{j+1})$ *für* $1 \le s < n - j$.

Aufgabe H5.2 (14 Punkte)

In dieser Aufgabe soll untersucht werden, wie sich die Newton-Darstellung

$$p_n(x) \;=\; \Delta_f^0(x_0) \;+\; \Delta_f^1(x_0, x_1)(x - x_0) \;+\; \ldots \;+\; \Delta_f^n(x_0, \ldots, x_n) \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

des Interpolationspolynoms bei Verwendung von äquidistanten Stützstellen vereinfachen läßt. Gegeben seien dazu die $n + 1$ Stützstellen $x_i := x_0 + ih$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ mit einer Gitterweite $h > 0$. Bei vorgegebenen Stützwerten $f_0, f_1, \ldots, f_n$ definiere man für $k = 0, 1, \ldots, n$ und $i = 0, 1, \ldots, n - k$ die (Vorwärts-)Differenzen $\Delta^k f_i$ durch

$$\Delta^0 f_i \;:=\; f_i \quad , \quad \Delta^k f_i \;:=\; \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i\;.$$

(a) Leiten Sie eine Summenformel zur Berechnung von $\Delta^k f_j$ her, und beweisen Sie Ihre Behauptung mittels vollständiger Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie für beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$

$$\Delta_f^k(x_j, \ldots, x_{j+k}) \;=\; \frac{1}{k! \cdot h^k} \Delta^k f_j$$

(c) Zeigen Sie, dass das Interpolationspolynom die Darstellung

$$p_n(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! \cdot h^k} \Delta^k f_0 \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

hat (Interpolationsformel nach Newton-Gregory).

(d) Zeigen Sie:

$$p_n(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{z}{k} \Delta^k f_0 \qquad \text{mit} \qquad z \;:=\; \frac{x - x_0}{h} \quad , \quad \binom{z}{k} \;:=\; \frac{1}{k!} z(z-1)\cdots(z-k+1)\,.$$

Aufgabe H5.3 (12 Punkte)

Ermitteln Sie die Hermite-Interpolierende zu den Vorgaben

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-24	-8	-2	0	4
$f'(x_i)$		10	3		
$f''(x_i)$			-4		

(a) indem Sie die erforderlichen Polynome ω_j^k, $j = 0, \dots, 4$, $k = 0, \dots, \mu_j$ für $f^{(k)}(x_j) \neq 0$ bestimmen und die Lösung $\quad p(x) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{\mu_j} f^{(k)}(x_j) \omega_j^k(x) \quad$ in Normalform bringen.

(b) mit Hilfe der verallgemeinerten dividierten Differenzen (für Hermite-Interpolation) nach Newton.

Aufgabe H5.4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie zur Funktion $f(x) := \cos(x)$ das Hermite-Interpolationspolynom p zu den Vorgaben $\big(x_i, f(x_i)\big)$, $\big(x_i, f'(x_i)\big)$ zu den Stützstellen $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ und $x_1 = \frac{\pi}{2}$. Nutzen Sie dazu die Newton-Darstellung mit einem Schema dividierter Differenzen. Schätzen Sie im Intervall $I = \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]$ den Fehler $\big|f(x) - p(x)\big|$ ab.