Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Interpolation und Approximation

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik im Sommersemester 2016

Aufgaben für die Übung am 22. April 2016

Aufgabe Ü3.1

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ungerade, und die nichtkonstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei entweder gerade oder ungerade. Weiter sei p_n das Interpolationspolynom zu den symmetrischen Stützpunkten

$$(x_0, f_0)\ ,\ \dots\ ,\ (x_n, f_n) \tag{$*$}$$

mit $x_i \neq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ und q_n das Interpolationspolynom zu den symmetrischen Stützpunkten

$$(x_0, f_0)\ ,\ \dots\ ,\ \left(x_{\frac{n+1}{2}-1}, f_{\frac{n+1}{2}-1}\right)\ ,\ \big(0, f(0)\big)\ ,\ \left(x_{\frac{n+1}{2}}, f_{\frac{n+1}{2}}\right)\ ,\ \dots\ ,\ (x_n, f_n) \tag{\#}$$

Dabei gilt

(i) $x_0 < x_1 < x_{\frac{n+1}{2}-1} < 0 < x_{\frac{n+1}{2}} < \ldots < x_n$

(ii) $-x_i = x_{n-i}$ für $i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$

(iii) $f_i = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$

Mit $L_0, L_1, \dots, L_n$ seien die Lagrange-Basispolynome zu $(*)$, mit $\hat{L}_0, \hat{L}_1, \dots, \hat{L}_{n+1}$ die Lagrange-Basispolynome zu $(\#)$ bezeichnet. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $\dfrac{x}{x_i} L_i(x) = \hat{L}_i$ für $i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ und $\dfrac{x}{x_i} L_i(x) = \hat{L}_{i+1}(x)$ für $i = \frac{n-1}{2} + 1, \dots, n$

(b) $L_i(-x) = L_{n-i}(x)$ für $i = 0, 1, \dots, n$

(c) Falls die Interpolationsdaten punktsymmetrisch sind, d.h. es gilt $f_i = -f_{n-i}$ für $i = 0, 1, \dots, n$, dann ist auch p_n punktsymmetrisch (ungerade).

(d) Falls die Interpolationsdaten achsensymmetrisch sind, d.h. es gilt $f_i = f_{n-i}$ für $i = 0, 1, \dots, n$, dann sind auch p_n und q_n achsensymmetrisch (gerade).

(e) Ist f ungerade, so gilt $p_n(x) = q_n(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$.

(f) Es gelte $f(0) = 0$. Für $x \neq 0$ interpoliert $\widetilde{p}_n(x) := \dfrac{q_n(x)}{x}$ die Daten $\left(x_0, \dfrac{f_0}{x_0}\right)\ ,\ \dots\ ,\ \left(x_n, \dfrac{f_n}{x_n}\right)$.
Falls die Daten $\big(x_i, f_i\big)$, $i = 0, 1, \dots, n$ punktsymmetrisch sind, so ist $\widetilde{p}_n$ gerade. Sind $\big(x_i, f_i\big)$, $i = 0, 1, \dots, n$ achsensymmetrisch, so ist $\widetilde{p}_n$ ungerade.

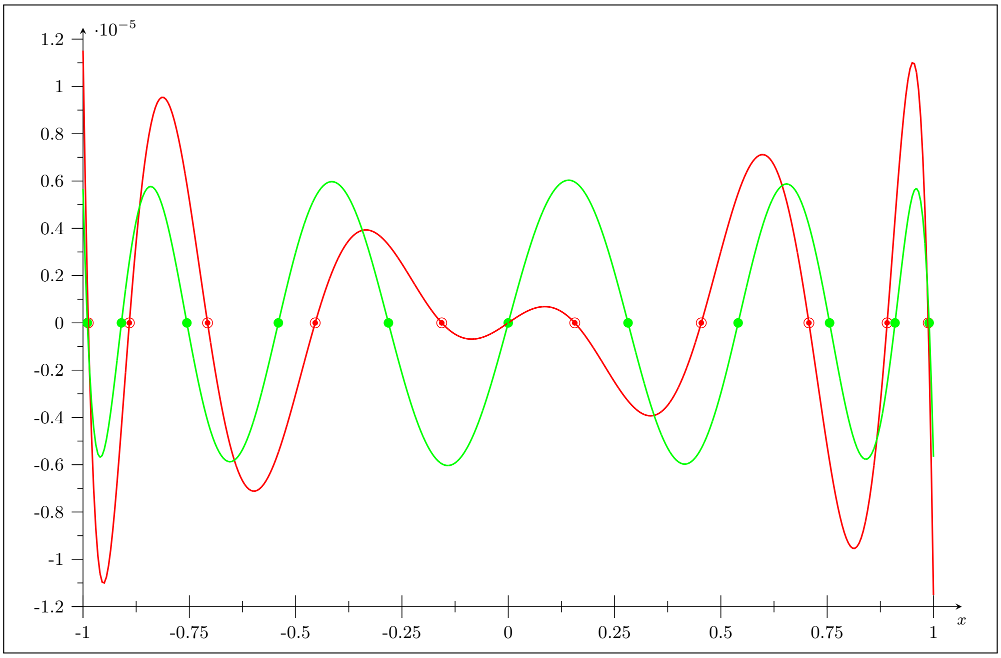

Abb. 1: Interpolation von $f(x) = \sin(\pi x)$ im Intervall $[-1, 1]$ durch Interpolationspolynome $p_n \in \mathbb{P}_n$ in $n+1$ Tschebyscheff-Stützstellen, für $n = 9$, für $n = 10$: Dargestellt sind die Fehlerfunktionen $f - p_n$, für $n = 9$, für $n = 10$.

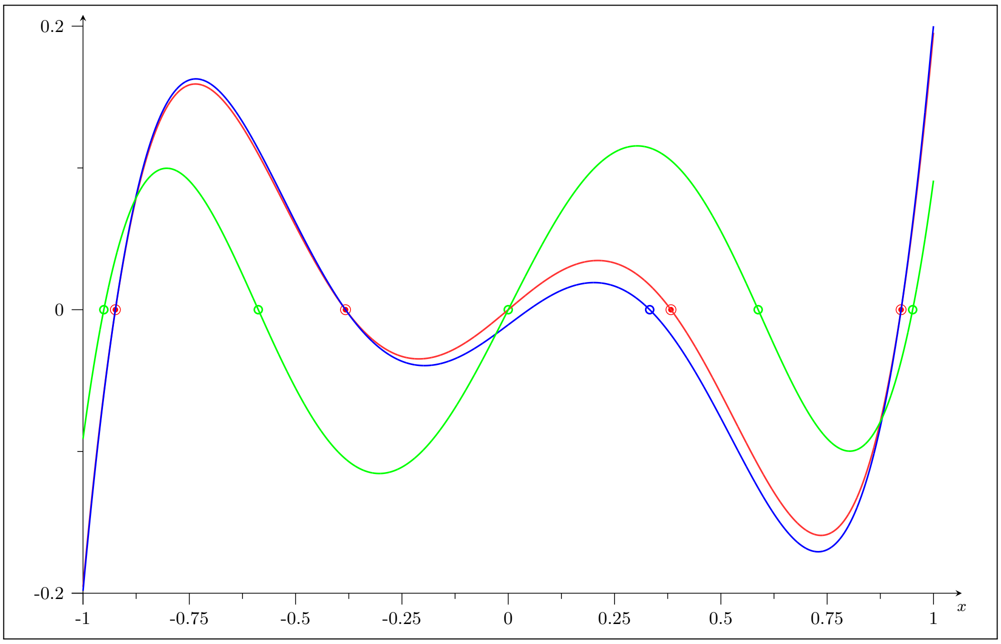

Abb. 2: Interpolation von $f(x) = \sin(\pi x)$ im Intervall $[-1, 1]$ durch Interpolationspolynome $p_n \in \mathbb{P}_n$ in $n+1$ Tschebyscheff-Stützstellen, für $n = 3$, für $n = 4$: Dargestellt sind die Fehlerfunktionen $f - p_n$, für $n = 3$, für $n = 4$. Die Punktsymmetrie der Interpolationsdaten wird durch p_n reproduziert, d.h. p_n ist in diesem Fall ungerade. Wird z.B. für $n = 3$ die dritte Tschebyscheff-Stützstellen x_2 ersetzt durch $x_2 - 0.05$, d.h. die Interpolationsdaten sind nicht mehr punktsymmetrisch, dann ist auch das zugehörige Interpolationspolynom nicht mehr symmetrisch.