Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Konvergenzkriterien für Reihen

1. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Die Umkehrung gilt allgemein nicht.

2. Wenn $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Partialsummenfolge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$ beschränkt ist.

3. **Konvergenzkriterium von Cauchy:** Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq m \geq n_0 \;\; : \;\; \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

4. **Leibnizkriterium:** Eine alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent, falls a_n eine monoton fallende Nullfolge ist, d.h. es gilt $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

5. **Majorantenkriterium:** Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei Reihen mit $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

   (a) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ eine konvergente Reihe, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

   (b) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent, dann divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$.

6. **Quotientenkriterium:** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz zu untersuchen und es gilt $a_n \neq 0$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$ gibt, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für alle $n \geq n_0$ gilt, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

   Das angegebene Kriterium läßt sich alternativ auch über den Grenzwert der Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ darstellen: Berechne $p := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Dann gilt:

   (c) Ist $p < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

   (d) Ist $p > 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

7. **Wurzelkriterium:** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz zu untersuchen. Wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ gibt, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq n_0$ gilt, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

   Das angegebene Kriterium läßt sich alternativ auch über den Grenzwert der Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ formulieren: Berechne $p := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt:

   (a) Ist $p < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

   (b) Ist $p > 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Zusammenhänge zwischen Wurzel-, Quotienten- und Majorantenkriterium:

- O.B.d.A. sei das Quotientenkriterium für $n_0 = 0$ erfüllt, d.h. es gibt ein q mit $0 < q < 1$ mit $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist äquivalent zu $|a_n| \leq |a_{n-1}| \cdot q$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$ schließlich $|a_n| \leq |a_0| \cdot q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufsummierung über alle $n \in \mathbb{N}$ liefert

  $$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_0| \cdot q^n = \frac{|a_0|}{1-q},$$

  d.h. die konvergente geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_0| \cdot q^n$ ist Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, woraus die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ folgt.

- O.B.d.A. sei das Wurzelkriterium für $n_0 = 0$ erfüllt, d.h. es gibt ein q mit $0 < q < 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist äquivalent zu $|a_n| \leq q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufsummierung über alle $n \in \mathbb{N}$ liefert

  $$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},$$

  d.h. die konvergente geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, woraus die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ folgt.

- Wurzel- und Quotientenkriterium sind also in gewisser Weise nur Spezialfälle des Majorantenkriteriums, wobei sich als Majorante wegen $0 \leq q < 1$ immer eine geometrische Reihe ergibt. Allerdings ist die Anwendung des Majorantenkriteriums nicht immer auf den ersten Blick ersichtlich, so dass die Konvergenzuntersuchung mittels Wurzel- und Quotientenkriterium oft einfacher ist.

Bemerkungen:

Es ist bekannt, dass aus absoluter Konvergenz auch Konvergenz (im gewöhnlichen Sinn) folgt, die Umkehrung aber allgemein nicht gilt. Mit Hilfe des Majoranten-, Wurzel- oder Quotientenkriteriums wird genau genommen die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ untersucht, d.h. ist eines der Kriterien erfüllt, so hat man damit die *absolute Konvergenz* der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nachgewiesen. Ist keines der drei Kriterien erfüllt, dann bedeutet dies nur, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergiert. Es kann aber dann trotzdem sein, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ im gewöhnlichen Sinn konvergiert, was dann auf anderem Wege zu untersuchen ist, z.B. mit dem Leibnizkriterium bei alternierenden Reihen oder es ist die Beschränktheit der Partialsummenfolge zu untersuchen. Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+1}$ ist nach Leibnizkriterium konvergent, aber wegen des Majorantenkriteriums nicht absolut konvergent.