

## Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und  
Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

### Übungsblatt 0 - ohne Abgabe, Besprechung in der ersten Übung

#### Aufgabe 1 (9 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

(a)  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

(b)  $\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$  für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

(c)  $\sum_{k=1}^n 2k - 1 = n^2$  für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

(d)  $n^2 > 2n + 1$  für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ .

(e)  $a_n := 3^n - 3$  für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ist durch 6 teilbar.

(f)  $(1+p)^n > 1 + n \cdot p$  für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  und  $p \in \mathbb{R}$  mit  $p > -1$ .

#### Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien  $V$  und  $W$  zwei Vektorräume über einem Körper  $K$ . Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  zwischen zwei  $K$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  heißt linear, wenn gilt: (i)  $f(v+w) = f(v) + f(w)$  und (ii)  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$  für alle  $v, w \in V$  und alle  $\lambda \in K$ . Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

(a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x \end{pmatrix}$

(b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

(c)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $f(z) = \bar{z}$

(d)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

#### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien  $e_1 := (1, 0, 0)^T$ ,  $e_2 := (0, 1, 0)^T$  und  $e_3 := (0, 0, 1)^T$  die Einheitsvektoren des  $\mathbb{R}^3$  und  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch  $f(x) := Ax$  mit  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sei eine lineare Abbildung.

- (a) Bestimmen Sie die Matrix  $A$  der linearen Abbildung  $f$ , die die Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3$  wie folgt abbildet.

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad , \quad f(e_2) = -2e_1 - 3e_2 + e_3 \quad \text{und} \quad f(e_3) = f(e_1) \times e_3.$$

(Hinweis: Dabei ist  $\times : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  das Vektorprodukt.)

- (b) Berechnen Sie die Dimension des Bildraumes  $\text{Im}(f)$ .
- (c) Bestimmen Sie den Unterraum  $\text{Ker}(f) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$ .

#### Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben seien im  $\mathbb{R}^5$  die Vektoren  $v_1 = (4, 1, 1, 0, -2)$ ,  $v_2 = (0, 1, 4, -1, 2)$ ,  $v_3 = (4, 3, 9, -2, 2)$ ,  $v_4 = (1, 1, 1, 1, 1)$  und  $v_5 = (0, -2, -8, 2, -4)$ .

- (a) Bestimmen Sie eine Basis von  $V := \text{span}(v_1, \dots, v_5)$ .
- (b) Wählen Sie alle möglichen Basen von  $V$  aus den Vektoren  $v_1, \dots, v_5$  aus, und kombinieren Sie jeweils  $v_1, \dots, v_5$  daraus linear.

#### Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei  $X$  eine Menge und  $A, B$  seien Teilmengen von  $X$ . Beweisen Sie, dass die Regel von DE MORGAN  $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$  gilt.

#### Aufgabe 6 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) = x + y$
- (b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ .