

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und
Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 3 - Abgabe bis Dienstag, 09.11.2010, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ gilt: $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
- (b) Ermitteln Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die $|\frac{1}{4}x^2 - 17| < 8$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen. Beweisen Sie folgende Aussage: Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$, so folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

A und B seien beschränkte und nichtleere Teilmengen der reellen Zahlen mit $A \subset B$. Zeigen Sie, dass $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$ gilt, und geben Sie zwei Beispiele für Mengen A und B an, bei denen in den behaupteten Ungleichungen an genau einer Stelle die Gleichheit gilt.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen mit den angegebenen Gliedern auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert:

- (a) $a_n := \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$
- (b) $b_n := \frac{3^n - 2n}{4^n + 1}$
- (c) $c_0 := \sqrt{2}$ und $c_n := \sqrt{2 + \sqrt{c_{n-1}}}$ für $n \geq 1$

(Hinweis zu (c): Der Grenzwert muss nicht berechnet werden.)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Nach Definition aus der Vorlesung heißt a Häufungswert einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert. In der Literatur wird häufig auch der Begriff des Häufungspunktes verwendet. Ermitteln Sie die Häufungswerte der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die wie folgt definiert sind:

$$a_n := x + 2(-1)^n, x \in [2, 3] \quad \text{und} \quad b_n := \frac{1}{n} + \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$