

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und
Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 4 - Abgabe bis Dienstag, 16.11.2010, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Per Definition gilt: a ist genau dann Häufungswert einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine gegen a konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt.

- (a) Zeigen Sie: a ist genau dann Häufungswert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

- (b) Vergleichen Sie die Aussage aus (a) mit der Definition des Grenzwertes einer Folge und diskutieren Sie den Unterschied.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Beweisen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 7}{4n^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

durch Rückgang auf die $\varepsilon - N$ -Definition der Konvergenz (vgl. z.B. Definition 3.2.4 im Lehrbuch von Kreußler-Pfister).

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n) = 1 - x^{n+1}$$

gilt und bestimmen Sie damit den Wert der *endlichen geometrischen Reihe* $\sum_{k=0}^n x^k$.

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden unendlichen Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

auf Konvergenz und bestimmen im Falle der Konvergenz die Grenzwerte. *Hinweis: Formen Sie bei (c) die Glieder der Partialsumme mit Hilfe von $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$ um.*