

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und
Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 5 - Abgabe bis Dienstag, 23.11.2010, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei beliebige Folgen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- (a) Seien a bzw. b die Häufungswerte der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit dem Häufungswert $a + b$.
- (b) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so ist die Folge $(a_n - a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- (c) Ist $(a_n - a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei reelle Zahlenfolgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende Behauptung: Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n =: c \in \mathbb{R},$$

so ist auch die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und besitzt ebenfalls den Grenzwert c .

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$a_n := \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n} \quad , \quad b_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \quad \text{und} \quad c_n := \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n}.$$

Zeigen Sie, dass $a_n < b_n < c_n$ für $1 \leq n < 1\,000\,000$ gilt, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 + n^3}{4 - n + n^2 - 3n^3} \right)^n$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + 3(-1)^n)^n}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n} - \sqrt{n}.$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(8n-1)(8n+7)}$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung der Reihenglieder. Ist mit Hilfe des Quotientenkriteriums eine Aussage zur Konvergenz möglich?