Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 6 - Abgabe bis Dienstag, 30.11.2010, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zu jeder reellen Zahl x mit $0 < x < 1$ gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass x in einen b-adischen Bruch $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}$ entwickelt werden kann. Entwickeln Sie $x = \frac{1}{9}$ in einen b-adischen Bruch für $b = 2, 7$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Verwenden Sie die Definition der Exponentialfunktion durch die unendliche Reihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ zum Beweis der Ungleichungen $1 + x \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ für $x < 1$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Das Cauchy-Produkt zweier unendlicher Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ wird definiert durch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n := \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ mit $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. Berechnen Sie die folgenden Cauchy-Produkte und untersuchen Sie diese auf Konvergenz:

(a) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right)$ für $x, y \in \mathbb{R}$

(b) $\left(3 + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n\right)\left(-2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\right)$

(*Hinweis zu (b): Beachten Sie bei Ihren Rechnungen die Folgenglieder a_0 und b_0!*)

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Die reellwertigen Funktionen f, g und h seien gegeben durch:

(a) $f(x) := \dfrac{x-5}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$

(b) $g(x) := \dfrac{8x^2 + 23}{\sqrt{7x^2 + 11} - \sqrt{6x^2 + 9}}$

(c) $h(x) := \dfrac{\tan(x)}{x}$

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche, auf denen die Funktionen sinnvoll definiert werden können. Prüfen Sie die Funktionen auf Stetigkeit und auf die Möglichkeit der stetigen Ergänzbarkeit.

(Aufgabe 5 - siehe Seite 2)

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Gegeben sei folgender Matlab-Algorithmus:

```
01  function[a] = berechneFolge(n)
02    a = zeros(1,n+1);
03    i = 1;
04    while (i <= n)
05      j = i;
06      while (j <= n)
07        a(i+1) = a(i) + j;
08        a(i+1) = a(i+1)*a(i+1);
09        a(i+1) = a(i+1) - a(i)*a(i);
10        j = j + 1;
11      end
12      i = i + 1;
13    end
```

Der Befehl `a = zeros(1,n+1)` erzeugt einen Nullvektor der Länge $n + 1$.

(a) Welches Ergebnis liefert der Algorithmus für $n = 2$ und für $n = 5$?

(b) Bestimmen Sie die Laufzeit des Algorithmus in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ unter Verwendung des Landau-Symbols $\mathcal{O}$.