Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 7 - Abgabe bis Dienstag, 07.12.2010, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden unendlichen Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

auf Konvergenz. Ist die Reihe (b) absolut konvergent?
(*Hinweis zu (a): Verwenden Sie bei Ihren Rechnungen u.a. die Bernoullische Ungleichung.*)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, so folgt stets $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

(b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(x) \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in I$. Dann ist f konstant, d.h. $f(x) = c \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in I$.

(*Hinweis zu (b): Nutzen Sie den Zwischenwertsatz.*)

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f an der Stelle x_0. Ist f an der Stelle x_0 stetig?

(a) $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) & , \quad x \neq 2 \\ 0 & , \quad x = 2 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 2$

(b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5} & , \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 2$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{20}} & , \quad x = 0 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to [a, b]$ sei eine stetige Funktion.

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f einen *Fixpunkt* hat, d.h. ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ existiert.

(b) Geben Sie ein Beispiel für ein offenes Intervall (a, b) und eine stetige Funktion $f : (a, b) \to (a, b)$ an, so dass f keinen Fixpunkt hat.

(Aufgabe 5 - siehe Seite 2)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| < 9\}$ in der komplexen Zahlenebene.

(b) Stellen Sie die komplexe Zahl $w = 5 \cdot \frac{1+i}{2-i} + 17\frac{3+i}{4+i}$ in der Form $a + bi$ dar.

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die die Gleichung $z^2 = (3 - i)z + 3i$ erfüllt ist.