

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und
Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 8 - Abgabe bis Dienstag, 14.12.2010, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (6 Punkte)

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums für den Grenzwert einer Funktion, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ stetig ist.

- (b) Weisen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums aus der Definition der Stetigkeit nach, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ *nicht* stetig ist. Kann man durch eine Änderung des Funktionswertes von g in $x_0 = 0$ eine stetige Funktion g erhalten?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

- (a) $f(x) := x^2$ im Intervall $[0, \infty)$
 (b) $g(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ im Intervall $(0, a)$ mit $0 < a < \infty$
 (c) $h(x) := \sqrt{x}$ im Intervall $[0, \infty)$

(Hinweis zu (c): Es gilt $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ für alle $x, y \in [0, \infty)$.)

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D der Funktionen an und berechnen Sie ihre erste Ableitung.

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}$ | (e) $f(x) := x^3 \cdot e^{2x}$ |
| (b) $f(x) = \exp(x^2)$ | (f) $f(x) := \ln(1 + \sqrt{x})$ |
| (c) $f(x) = \ln(\cos(x))$ | (g) $f(x) := \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x) + 2}$ |
| (d) $f(x) = \ln \ln x $ | |

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Stellen Sie eine Formel für die n -te Ableitung der Funktion $f(x) := \frac{1}{1+2x}$ auf und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.