

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und
Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 9 - Abgabe bis Dienstag, 04.01.2011, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass f für jedes $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung von f .
Hinweis: Diskutieren Sie die Differenzierbarkeit der Funktion f für $x \neq 0$ durch Differentiationsregeln und für $x = 0$ mit Hilfe des Differenzenquotienten.
- (b) Ist f stetig auf $\mathbb{R}$?
- (c) Ist f' stetig auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

- (a) Zeigen Sie: Die Ableitung einer geraden (bzw. ungeraden) Funktion ist ungerade (bzw. gerade).
- (b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Polynomfunktion n -ten Grades, $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie, dass f genau dann gerade (bzw. ungerade) ist, wenn $a_k = 0$ für alle ungeraden (bzw. geraden) Indizes k ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und im offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion: Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle x_0 aus den angegebenen Intervallen $[a, b]$, für die $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$ gilt:

- (a) $f(x) = x^2$ im Intervall $[1, 2]$
- (b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ im Intervall $[0, 1]$
- (c) $f(x) = |x - 1|$ im Intervall $[0, 2]$

(Aufgaben 4 bis 6 - siehe Seite 2)

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen f, g und h auf Umkehrbarkeit im angegebenen Intervall D . Falls die Funktion umkehrbar ist, dann berechnen Sie die Ableitung an der Stelle y_0 .

- (a) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$, $D = (0, \infty)$, $y_0 = 2$
- (b) $g(x) = x(1-x)$, $D = \mathbb{R}$, $y_0 = 1$
- (c) $h(x) = x - \frac{1}{2} \sin(x)$, $D = \mathbb{R}$, $y_0 = 0$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b der durch $f(x) := a \cdot e^{1-x^2} + b \cdot \ln(x^2 + 4x + 7)$ definierten Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass der Graph der Funktion an der Stelle $x_1 = -1$ eine waagerechte Tangente besitzt, die Tangente an der Stelle $x = 1$ mit der x -Achse einen Winkel von 45° bildet und die Funktion in einer Umgebung von $x_2 = 1$ monoton steigt.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Führen Sie für die folgenden beiden Funktionen eine vollständige Kurvendiskussion durch (maximaler Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrien, Nullstellen, Unstetigkeitsstellen, Asymptoten, lokale Extrema und Wendepunkte, Monotoniebereiche sowie asymptotisches Verhalten an Unstetigkeitsstellen und im Unendlichen).

- (a) $f(x) = x^3 - x$
- (b) $f_a(x) = \frac{x^2 - 2ax + 2a^2}{x-a}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Frohe Weihnachten und einen erfolgreichen Start ins Jahr 2011
wünschen die Mitarbeiter des Lehrstuhls für Numerische und Angewandte Mathematik.