

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und
Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 12 - Abgabe bis Dienstag, 25.01.2011, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{2(x-1)}{x^3 - x^2 - x + 1}$. Bestimmen Sie das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$ durch Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

(a) $\int \cos(5x)e^{-x} dx$

(b) $\int \frac{dx}{x^2 + 2}$

(Hinweis zu (b): Substitution $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$.)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 4} dx$

(c) $\int_{-3}^4 \max\{x^2 + 4x - 4, 3x + 2\} dx$

(d) $\int_1^e 3x^3 \ln(x^4) dx$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der Fourierreihe $p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ für die nachfolgend genannten 2π -periodischen Funktionen f :

(a) $f(x) := \frac{x}{2}$ für $x \in (-\pi, \pi]$

(b) $f(x) := \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} & , \quad -\pi < x \leq 0 \\ -x + \frac{\pi}{2} & , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

(Aufgabe 5 - siehe Seite 2)

Aufgabe 5 (8 Punkte)

In der Vorlesung wurde die *Trapezregel* gezeigt: Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gibt es ein $t \in [0, 1]$, so dass

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{12} f''(t). \quad (*)$$

- (a) Berechnen Sie die bestimmten Integrale $\int_0^1 x^3 \, dx$ und $\int_0^1 x^4 \, dx$ jeweils exakt und numerisch mit Hilfe der Trapezregel. Überprüfen Sie für die beiden Integrale, für welche $t \in \mathbb{R}$ in $(*)$ Gleichheit gilt.
- (b) Verallgemeinern Sie die Trapezregel auf $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\int_a^b f(x) \, dx$ aus $f(a)$ und $f(b)$ berechnet werden kann. *Hinweis: Substitutionsregel.*
- (c) Berechnen Sie mit der unter (b) entwickelten Verallgemeinerung nun $\int_0^1 x^3 \, dx$ und $\int_0^1 x^4 \, dx$, in dem Sie das Intervall $[0, 1]$ in vier gleichlange Intervalle I_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ zerlegen und auf diesen $\int_{I_i} f(x) \, dx$ durch ein Trapez abschätzen. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie mit Ihren Ergebnissen aus Aufgabenteil (a) vergleichen?