

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik/Diplom, Informatik/Bachelor, Informations- und
Medientechnik/Bachelor und eBusiness/ Bachelor, 3. Semester im Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 14 - Abgabe bis Donnerstag, 10.02.2011, 12:00 Uhr im Postfach 32 im HG

Die Korrektur Ihrer Lösungen erfolgt nur, wenn Sie noch nicht 50 % der Übungspunkte erreicht haben, die sich aus den Ergebnissen der Übungsblätter 1 bis 13 ergeben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- Untersuchen Sie, ob die Menge $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \wedge x^2 + 2x + 2 > 5\}$ reeller Zahlen nach oben oder nach unten beschränkt ist. Bestimmen Sie ggf. $\sup(X)$ und $\inf(X)$.
- Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die $\frac{x+24}{x} < 2x + 4$ gilt.
- Betrachten Sie die floor-Funktion $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $\lfloor x \rfloor = \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$. Berechnen Sie die Funktionswerte $\left\lfloor \frac{n \cdot m \cdot k + j}{m} \right\rfloor$ und $\left\lfloor \frac{n \cdot m \cdot k + j + m}{m} \right\rfloor$ für $n, m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $j = 0, 1, \dots, m - 1$.
- Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den angegebenen Gliedern auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie ggf. deren Häufungswerte bzw. Grenzwerte.

- $a_n := \frac{3n^2}{5n^2+2n} + \cos(n\pi) \cdot \frac{3n^2+5n}{2n^2+3} \cdot \frac{7n^3+n^8}{10n^3+8n^3+\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}$
- $a_n := \sqrt{3n^2-1} - \sqrt{4n^2-\frac{1}{n}}$ für $n \geq 1$
- $a_n := \sqrt[n]{4^n+5^n}$ für $n \geq 1$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz.

- | | |
|--|---|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+(-2)^n} \right)^n$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18^n}{2^{n-1} \cdot 9^{n+1}}$ | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ |

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für die nachfolgend genannten Funktionen f die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ an der angegebenen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$. Falls der Grenzwert nicht existiert, dann geben Sie die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$ und $x_0 = 0$

(b) $f(x) = \frac{1}{|x|}$ und $x_0 = 0$

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D der Funktionen an und berechnen Sie die erste Ableitung der Funktionen f . Falls f nicht auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar sein sollte, dann geben Sie zusätzlich eine Begründung an, warum f für die entsprechenden $x \in D$ nicht differenzierbar ist.

(a) $f(x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right), \quad a \in (0, \infty)$

(c) $f(x) = |\cos(ax)|, \quad a \in (0, \infty)$

(b) $f(x) = \ln\left(\exp(x^2) \cdot \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot 5^x\right)$

(d) $f(x) = \frac{\cos(x)}{e^x}$

(Hinweis zu (c): Untersuchen Sie insbesondere auch die Differenzierbarkeit in den Nullstellen von f !)

Aufgabe 6 (8 Punkte)

- (a) Führen Sie für die durch $f(x) = \frac{4x-2}{x^2}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Kurvendiskussion mit folgendem Inhalt durch: Nullstellen, Polstellen, Verhalten im Unendlichen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrempunkte und Koordinaten der Wendepunkte.
- (b) Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$ für $a \in (0, \infty)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe. Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe von f ?

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} - \frac{1}{x\sqrt{x}} dx, \quad x \in (0, \infty)$

(c) $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

(b) $\int 3^x + 5 \cos(x) + \frac{2}{1+x^2} dx$

(d) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

(Hinweis zu (c): Verwenden Sie eine geeignete Substitution und führen Sie Partialbruchzerlegung durch.)

Aufgabe 8 (4 Punkte)

In tropischen Wäldern verfault die abgestorbene Vegetation mit einer Rate von 80 % pro Jahr. Gleichzeitig sammelt sich aber etwa 7 Gramm neuer „Abfall“ pro Quadratzentimeter und Jahr an. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Menge $u(t)$ des Abfalls auf einem Quadratzentimeter auf und weisen Sie nach, dass sich diese Menge im Laufe der Zeit stabilisiert.

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Eine Information werde durch Massenmedien in kurzen Abständen, also „praktisch kontinuierlich“ einer Bevölkerung der Größe $N > 0$ mitgeteilt. Die Informationsverbreitung soll zur Zeit $t_0 = 0$ beginnen, und $I(t)$ sei die Anzahl der zur Zeit $t \geq 0$ informierten Mitglieder der Bevölkerung, insbesondere gelte $I(0) = 0$. Machen Sie für die Informationsrate $\frac{dI}{dt}$ einen „vernünftigen“ Proportionalitätsansatz und lösen Sie das so entstehende Anfangswertproblem. Welche Aussage ist für $t \rightarrow \infty$ möglich? (Frage am Rande, nicht zur Bewertung: Ist diese Aussage allgemein realitätsnah, insbesondere für großes N ?)

Aufgabe 10 (8 Punkte)

Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ den Gradienten und die Hessematrix. Bestimmen Sie die kritischen (stationären) Punkte von f und entscheiden Sie, ob es sich dabei um lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 4y + 5$